Opérateurs différentiels

Les expressions des opérateurs différentiels dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques ne sont pas à connaître. Toutes les autres formules le sont.

1 Opérateur gradient

Si f est un champ scalaire, alors $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ est un champ vectoriel. Il indique la direction de plus grande variation (spatiale) de f. Mathématiquement, il est tel que

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

Formule intégrale. Soit A et B deux positions dans l'espace. On a

$$f(B) - f(A) = \int_A^B \mathrm{d}f = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

C'est-à-dire que la circulation de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ sur un chemin quelconque joignant A à B donne la variation de f entre A et B. En conséquence, le gradient est orthogonal aux courbes iso-f.
En coordonnées cartésiennes,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right. \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}}$$

En coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}$$

et en coordonnées sphériques,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

Remarque : Le gradient est en m^{-1} (comme une dérivée spatiale).

2 Opérateur divergence

Si $\vec{A}$ est un champ vectoriel, alors $\text{div}\,\vec{A}$ est un champ scalaire. Elle renseigne sur la propension de $\vec{A}$ à converger ou diverger localement autour d'un point $\vec{r}$ de l'espace. Mathématiquement, elle est telle que le flux sortant $\mathrm{d}\phi$ de $\vec{A}$ à travers une surface fermée infinitésimale, entourant un volume infinitésimal $\mathrm{d}V$, est donné par

$$\mathrm{d}\phi = \text{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}V$$

Formule intégrale : théorème de Green-Ostrogradski. Soit un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface fermée $\mathcal{S}$ orientée sortante. Alors

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}\,\vec{A}\ \mathrm{d}V$$

Notamment, si $\text{div}\,\vec{A} = 0$, « il y a localement autant de $\vec{A}$ qui entre et qui sort ».
En coordonnées cartésiennes seulement,

$$\text{div}\,\vec{A} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \cdot \left| \begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right. \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\text{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

En coordonnées cylindriques,

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

et en coordonnées sphériques,

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\,(r^2\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial\,(\sin\theta\,A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Remarque : La divergence est en m^{-1} (comme une dérivée spatiale).

3 Opérateur rotationnel

Si $\vec{A}$ est un champ vectoriel, alors $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ est un champ vectoriel. Il renseigne sur la propension de $\vec{A}$ à tourner localement autour d'un point $\vec{r}$ de l'espace. Mathématiquement, il est tel que la circulation $\mathrm{d}\mathcal{C}$ de $\vec{A}$ le long d'un contour fermé orienté infinitésimal sur lequel repose une surface infinitésimale orientée $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$, est donné par

$$\mathrm{d}\mathcal{C} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Formule intégrale : théorème de Stokes. Soit une surface S reposant sur un contour fermé $\mathcal{C}$ orienté. Alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Notamment, si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \neq \vec{0}$, le champ $\vec{A}$ a tendance à tourner localement autour du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.
En coordonnées cartésiennes seulement,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array}\right. \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{array}\right.}$$

En coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}$$

et en coordonnées sphériques,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial(\sin\theta\,A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r\,A_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_\varphi}$$

Remarque : Le rotationnel est en m^{-1} (comme une dérivée spatiale).

4 Laplacien scalaire

Si f est un champ scalaire, alors Δf est un champ scalaire. Il est donné par $\boxed{\Delta f = \operatorname{div}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f}$
En coordonnées cartésiennes seulement,

$$\boxed{\Delta f = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array}\right. \cdot \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right. = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

En coordonnées cylindriques,

$$\Delta f = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En coordonnées sphériques,

$$\Delta f = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (r\,f)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Remarque : Le laplacien scalaire est en m^{-2} (comme une dérivée seconde spatiale).

5 Laplacien vectoriel

Si $\vec{A}$ est un champ vectoriel, alors $\Delta\vec{A}$ est un champ vectoriel. On a la relation (toujours vraie)

$$\Delta\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$$

En coordonnées cartésiennes seulement,

$$\boxed{\Delta\vec{A} = \left|\begin{array}{l}\Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\end{array}\right. = \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}}$$

En coordonnées cylindriques et sphériques, son expression est très lourde.
Remarque : Le laplacien vectoriel est en m^{-2} (comme une dérivée seconde spatiale).

6 Relations entre les opérateurs

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = 0} \qquad \text{quelles que soient } f \text{ et } \vec{A}.$$

On en déduit que

$$\text{si} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0} \qquad \text{alors il existe } f \text{ telle que} \qquad \vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$$

et

$$\text{si} \qquad \mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \qquad \text{alors il existe } \vec{B} \text{ tel que} \qquad \vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$$

Par ailleurs

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \Delta f \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

où le laplacien à gauche est le laplacien scalaire et le laplacien à droite est le laplacien vectoriel.

7 Opérateur « a scalaire gradient »

7.1 Pour un scalaire

Si f est un champ scalaire et $\vec{a}$ un champ de vecteurs, alors $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$ est un champ scalaire, et c'est simplement le produit scalaire de $\vec{a}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$. En coordonnées cartésiennes seulement, il s'exprime par

$$\boxed{\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = a_x\frac{\partial f}{\partial x} + a_y\frac{\partial f}{\partial y} + a_z\frac{\partial f}{\partial z}}$$

7.2 Pour un vecteur

Si $\vec{b}$ et $\vec{a}$ sont des champs de vecteurs, alors $\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{b}$ est un champ vectoriel. Ici les parenthèses ne doivent pas être omises car $\cancel{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{b}}$ ne veut rien dire. En coordonnées cartésiennes seulement, il s'exprime par

$$\boxed{\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{b} = \left|\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,b_x \\ \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,b_y \\ \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,b_z\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}a_x\dfrac{\partial b_x}{\partial x} + a_y\dfrac{\partial b_x}{\partial y} + a_z\dfrac{\partial b_x}{\partial z} \\ a_x\dfrac{\partial b_y}{\partial x} + a_y\dfrac{\partial b_y}{\partial y} + a_z\dfrac{\partial b_y}{\partial z} \\ a_x\dfrac{\partial b_z}{\partial x} + a_y\dfrac{\partial b_z}{\partial y} + a_z\dfrac{\partial b_z}{\partial z}\end{array}\right. = a_x\dfrac{\partial\vec{b}}{\partial x} + a_y\dfrac{\partial\vec{b}}{\partial y} + a_z\dfrac{\partial\vec{b}}{\partial z}}$$

Lorsque l'opérateur est appliqué à lui-même, par exemple dans $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$, on a la formule suivante (hors-programme) :

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,v^2 + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}$$

appelée décomposition de Lamb.