Calcul d'un champ électrostatique

Tous les calculs de champ électrostatique qui peuvent vous être demandés aux concours reposeront sur l'application du **théorème de Gauss**. Cette fiche propose une rédaction extensive et explicite de l'application de ce théorème.

1 Théorème de Gauss

Théorème. Le théorème de Gauss s'écrit pour rappel

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

où $\mathcal{S}$ est une surface fermée (ce qui est explicité par le symbole ◯ sur l'intégrale) donc **orientée sortante** par convention, Q_{int} la charge électrique à l'intérieur de $\mathcal{S}$ et $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$ la permittivité diélectrique du vide.
Il se lit « le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge électrique présente à l'intérieur de cette surface, divisée ε_0 ».

Remarque 1. Le théorème de Gauss est une équation fondamentale de la physique (au même titre que les lois de Newton ou les principes de la thermodynamique par exemple). Elle ne se démontre donc pas, et est par ailleurs encore valable hors du cadre de la statique.

Remarque 2. Le théorème de Gauss est la version intégrale de l'**équation de Maxwell-Gauss**

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}}$$

où ϱ est la densité volumique de charge. Les deux sont donc strictement équivalents et on passe de l'un à l'autre par le théorème de Green-Ostrogradski.

Remarque 3. C'est en fait le théorème de Gauss qui nous apprend que les charges électriques (Q_{int}) créent des champs électriques ($\vec{E}$).

Remarque 4. Le théorème de Gauss ne donne que le flux du champ électrique, et c'est généralement complètement insuffisant pour en déduire $\vec{E}$: c'est pour cette raison qu'on ne l'utilise en pratique que sur des situations possédant beaucoup de symétries.

2 Application du théorème de Gauss

Un exercice typique vous demande de « calculer un champ électrique », ce qui est souvent exprimé comme « déterminer l'expression du champ électrique en tout point de l'espace », qu'il faut comprendre comme « déterminer l'expression du champ électrique en un point M quelconque de l'espace ». La stratégie de résolution est alors la suivante :

1. **Faire un schéma.** Sur ce schéma,
   (a) représenter la distribution de charge ;
   (b) placer un point M quelconque sur le schéma (le but est de calculer le champ $\vec{E}$ en M, donc on veut voir un point M sur le schéma) ;
   (c) choisir un système de coordonnées (cartésien, cylindrique ou sphérique) et le représenter (attaché au point M).

2. **Étudier les symétries de la distribution de charge.** Cela permet de déterminer **la direction de $\vec{E}$**. Il faut pour cela réaliser les étapes suivantes :

(a) exhiber deux plans de symétrie de la distribution de charge **qui passent par** M (on veut la direction de $\vec{E}$ en M donc les plans de symétrie qui ne passent pas par M nous sont inutiles). Ils s'écrivent $(M,\vec{u},\vec{v})$. **Attention, si la distribution ne présente pas de symétrie évidente, elle est probablement constituée de plusieurs morceaux qui eux en présentent : utiliser alors le théorème de superposition pour séparer le calcul du champ en plusieurs, correspondant chacun au calcul du champ dû à une partie de la distribution de charge.**

(b) en déduire par principe de Curie que ce sont également des plans de symétrie pour $\vec{E}$;

(c) en déduire que $\vec{E}$ est inclu dans ces plans (car un champ de vecteurs appartient forcément à ses plans de symétrie, sinon il prendrait deux directions différentes au même point ce qui est impossible) ;

(d) conclure sur **la direction** de $\vec{E}$ (il appartient à l'intersection des deux plans trouvés).

3. **Étudier les invariances de la distribution de charge.** Cela permet de déterminer **les variables dont $\vec{E}$ dépend**. On réalise pour cela les étapes suivantes :

(a) parmi les trois variables spatiales (qu'elles soient cartésiennes, cylindriques ou sphériques), trouver celles dont la distribution de charge ne dépend pas ;

(b) en déduire par principe de Curie que le champ électrique ne dépend pas non plus de ces variables ;

(c) conclure sur **les variables dont $\vec{E}$ dépend**.

4. **Appliquer le théorème de Gauss**. Cela consiste :

(a) à écrire le théorème de Gauss ;

(b) à choisir une surface (dite « de Gauss », elle est fermée et orientée sortante) **qui contient** M (on veut calculer le champ en M donc la surface doit passer par M) sur laquelle on appliquera le théorème. Cette surface doit vous permettre de déduire $\vec{E}$ connaissant seulement son flux : cela n'est possible que si la surface est choisie intelligemment. Elle doit en fait **respecter les symétries de la distribution de charge** (donc de $\vec{E}$ par principe de Curie). On choisira ainsi une sphère pour une distribution de charge sphérique, un cylindre pour une distribution cylindrique et un parallélépipède pour une distribution à géométrie cartésienne (comme un plan par exemple) ;

(c) **dessiner cette surface de Gauss sur le schéma** ;

(d) calculer le flux de $\vec{E}$ à travers cette surface

$$\oiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Commencer pour cela par préciser la forme de $\vec{E}$ déterminée par l'analyse des symétries et des invariances, puis la direction de $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ (toujours orthogonale à la surface qui l'engendre). Si besoin décomposer la surface de Gauss en plusieurs morceaux.

(e) calculer la charge à l'intérieur de la surface de Gauss

$$Q_{\mathrm{int}}$$

Dans la plupart des cas, la distribution de charge est volumique donc on écrit « charge = charge volumique ϱ × volume à l'intérieur de la surface de Gauss où il y a des charges ». **Dessiner le volume à l'intérieur de la surface de Gauss où il y a des charges** sur le schéma pour le calculer facilement. **Attention, suivant la position du point M, il peut y avoir plusieurs expressions possibles pour Q_{int}. Traiter alors chacun des cas indépendamment.**

(f) écrire que les deux calculs précédents sont en fait égaux

$$\oiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$$

pour en déduire l'amplitude de $\vec{E}$;

(g) conclure en précisant la direction de $\vec{E}$ obtenue par l'analyse des symétries ;

(h) il est généralement apprécié de tracer l'amplitude de $\vec{E}$ en fonction de la variable dont elle dépend.

Une fois que toutes ces étapes vous paraissent limpides, vous pouvez bien sûr largement accélérer la rédaction (surtout à l'oral ; à l'écrit, restez explicites dans votre démarche et vos justifications). Veillez malgré tout à ne pas confondre concision et imprécision.