Équations différentielles ordinaires

Les trois équations à connaître par cœur

Équation de relaxation

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{f}{\tau} = 0$$

La solution est

$$f(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Équation d'oscillation harmonique

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\, f = 0$$

La solution est

$$f(t) = A\,\cos\omega_0\, t + B\,\sin\omega_0\, t$$

Équation d'atténuation ou d'amplification

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - \frac{f}{\delta^2} = 0$$

La solution est

$$f(x) = A\,\mathrm{e}^{-x/\delta} + B\,\mathrm{e}^{x/\delta}$$

Méthode générale (équation linéaire)

1) Écrire l'équation homogène (second membre nul) puis donner sa solution ;
2) chercher la solution particulière (si il y a un second membre) ;
3) écrire la solution complète comme somme de la solution particulière et de la solution homogène ;
4) exploiter les conditions initiales sur la solution complète pour déterminer les constantes d'intégration.

Solution particulière (équation linéaire)

■ Si le second membre est constant, chercher la solution particulière f_p en écrivant $f_p = \text{Cste}$ soit

$$\frac{\mathrm{d}f_p}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2 f_p}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

■ Si il est sinusoïdal, chercher f_p sous forme sinusoïdale (principe de la notation complexe).

Éq. diff. ordinaire linéaire homogène du second ordre à coeff. constants

$$\ddot{f} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{f} + \omega_0^2\, f = 0$$

Discriminant du polynôme caractéristique : $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$

■ Si $\Delta > 0$, deux racines réelles (régime apériodique)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2\,Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4\,Q^2} - 1} \qquad \text{et les solutions sont} \qquad f(t) = A\,\mathrm{e}^{\lambda_1\, t} + B\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

■ Si $\Delta = 0$, une seule racine réelle (régime critique)

$$\lambda_0 = -\frac{\omega_0}{2\,Q} \qquad \text{et les solutions sont} \qquad f(t) = \Big(A + B\,t\Big)\,\mathrm{e}^{\lambda_0\, t}$$

■ Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées $\lambda_0 \pm \mathrm{j}\,\Omega$ (régime pseudo-périodique)

$$\lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{\omega_0}{2\,Q}}_{=\lambda_0} \pm \mathrm{j}\;\underbrace{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4\,Q^2}}}_{=\Omega} \qquad \text{et les solutions sont} \qquad f(t) = \Big(A\cos\Omega\, t + B\sin\Omega\, t\Big)\,\mathrm{e}^{\lambda_0\, t}$$

Séparation des variables

pour les équations différentielles ordinaires du 1$^{\text{er}}$ ordre, **non linéaires** et/ou à **coefficient non constant**.

Mettre tout ce qui est en f d'un côté, tout ce qui est en t de l'autre, et intégrer. **ex.** $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \alpha\, t^3\, f^2 = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{f^2} = -\alpha\, t^3 \mathrm{d}t \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{\alpha\, t^4}{4} + \text{Cste}$ donc $f(t) = \frac{4}{4\,\text{Cste} + \alpha\, t^4}$