Systèmes de coordonnées

Dans toute la suite on considère un référentiel $(\mathcal{R})$. Le point d'origine O est lié à $(\mathcal{R})$. On s'intéresse au repérage d'un point M par rapport à cette origine. Toutes les relations sont triviales dès lors qu'on les visualise sur un dessin. Elles ne sont donc pas à connaître par cœur mais plutôt à savoir retrouver rapidement.

1 Système de coordonnées cartésien

C'est un triplet (x, y, z) tel que

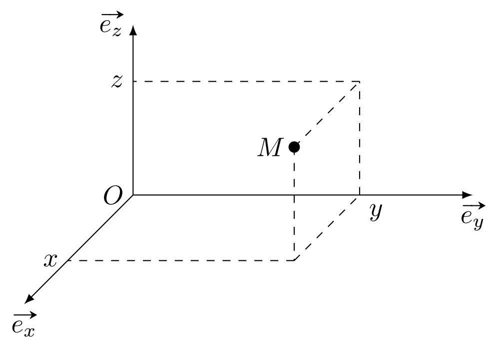
$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

où les vecteurs de base $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont fixes dans $(\mathcal{R})$. Ils forment une base orthonormale :

$$\overrightarrow{e_x}\cdot\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_y}\cdot\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z}\cdot\overrightarrow{e_z} = 1 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_x}\cdot\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_x}\cdot\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_y}\cdot\overrightarrow{e_z} = 0$$

Ils forment de plus un trièdre direct :

$$\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z}, \qquad \overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_x} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_y}$$



On a
$$x = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{e_x}, \qquad y = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{e_y} \qquad \text{et} \qquad z = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{e_z}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ étant fixes dans $(\mathcal{R})$, un déplacement infinitésimal s'écrit

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$$

Un **élément de surface** $z = \text{cste}$ est donné par $\boxed{\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ (etc...), et un **élement de volume** par $\boxed{\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$.

Les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ et accélération $\overrightarrow{a} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$ sont

$$\overrightarrow{v} = \dot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{a} = \ddot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}$$

2 Système de coordonnées cylindrique

C'est un triplet (r, θ, z) tel que

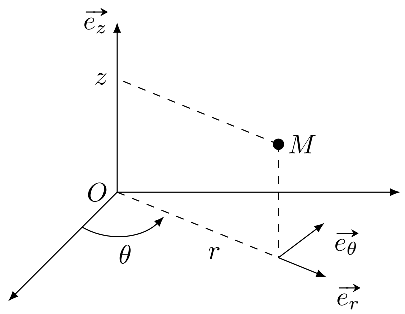
$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

Le vecteur de base $\overrightarrow{e_z}$ est fixe dans $(\mathcal{R})$, mais $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ ne le sont pas. Ils forment une base orthonormale :

$$\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\theta}\cdot\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_z}\cdot\overrightarrow{e_z} = 1 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_\theta}\cdot\overrightarrow{e_z} = 0$$

Ils forment de plus un trièdre direct :

$$\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_z}, \qquad \overrightarrow{e_\theta} \wedge \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_r} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\theta}$$



On a
$$r = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{e_r} \qquad \text{et} \qquad z = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{e_z}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ ne sont pas fixes dans $(\mathcal{R})$: ils dépendent de θ par

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}\theta} = \overrightarrow{e_\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\overrightarrow{e_r}$$

donc leurs dérivées temporelles sont non nulles

$$\dot{\overrightarrow{e_r}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} \qquad \text{et} \qquad \dot{\overrightarrow{e_\theta}} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r}$$

et un déplacement infinitésimal s'écrit

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$$

Un **élément de surface** $z = $ cste est donné par $\boxed{\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}$; un **élément de surface** $r = $ cste par $\boxed{\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$ et un **élément de volume** par $\boxed{\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$.

Les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ et accélération $\overrightarrow{a} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$ sont

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\,\overrightarrow{e_r} + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\,\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}$$

3 Système de coordonnées sphérique

C'est un triplet (r, θ, φ) avec $\theta \in [0;\, \pi]$ et $\varphi \in [0;\, 2\,\pi]$ tel que

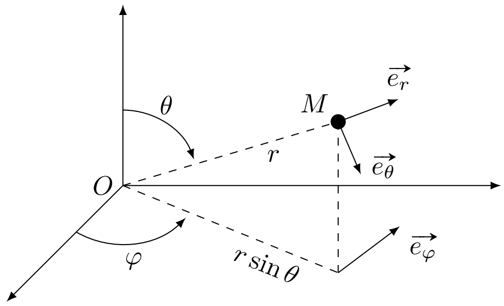
$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$$

Les vecteurs de base $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ forment une base orthonormale

$$\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\theta}\cdot\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_\varphi}\cdot\overrightarrow{e_\varphi} = 1 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_\theta}\cdot\overrightarrow{e_\varphi} = 0$$

Ils forment de plus un trièdre direct :

$$\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_\varphi}, \qquad \overrightarrow{e_\theta} \wedge \overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_r} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{e_\varphi} \wedge \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\theta}$$



Aucun des vecteurs de base $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ n'est fixe dans $(\mathcal{R})$. Leurs dépendances en θ et φ est compliquée. On retiendra seulement

$$\dot{\overrightarrow{e_r}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

qui permet d'écrire le déplacement infinitésimal

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

Un **élément de surface** $r = $ cste est $\boxed{\mathrm{d}S = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}$, et un **élément de volume** $\boxed{\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}$.

Le vecteur vitesse est (celui de l'accélération n'est pas à connaître)

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + r\,\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

4 Relations de passage entre les systèmes cartésien et cylindrique

Il suffit de projeter les vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne pour obtenir leurs composantes :

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y}, \qquad \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_z}$$

On déduit $\quad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad \text{et} \qquad z = z.$

5 Relations de passage entre les systèmes cartésien et sphérique

On retiendra seulement $\quad \overrightarrow{e_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{e_y} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_z}$

d'où on déduit $\quad x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad \text{et} \qquad z = r\cos\theta.$

6 Volumes et surfaces

Une longueur est homogène à une longueur, une surface est homogène à une longueur au carré, et un volume est homogène à une longueur au cube.

- ▶ **Le rectangle** (côtés a et b). Périmètre $\mathcal{P} = 2\,(a+b)$ et surface $\mathcal{S} = a\,b$.
- ▶ **Le pavé rectangulaire** (côtés a, b et c). Surface $\mathcal{S} = 2\,(a\,b + b\,c + c\,a)$ et volume $\mathcal{V} = a\,b\,c$.
- ▶ **Le cercle** (rayon r). Périmètre $\mathcal{P} = 2\,\pi\,r$ et surface $\mathcal{S} = \pi\,r^2$.
- ▶ **La sphère** (rayon r). Surface $\mathcal{S} = 4\,\pi\,r^2$ et volume $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi\,r^3$.
- ▶ **Le cylindre** (rayon r, hauteur h). Surface latérale $\mathcal{S} = 2\,\pi\,r\,h$, et volume $\mathcal{V} = \pi\,r^2\,h$.