Équation de conservation en régime stationnaire

On travaille sur l'exemple de la diffusion de particules. En **régime stationnaire**, l'équation locale de conservation

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \overrightarrow{j_N} = 0 \qquad \text{se réduit à} \qquad \boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{j_N} = 0}$$

Il y a deux moyens d'exploiter cette relation. Soit directement **sous forme locale**, soit **sous forme intégrale**. Cette fiche expose ces deux moyens dans chacun des trois systèmes de coordonnées.

Table des matières

1 Sous forme locale

On appelle forme locale l'expression $\operatorname{div} \overrightarrow{j_N} = 0$. Il suffit pour l'exploiter de préciser l'opérateur divergence dans le système de coordonnées utilisé.

1.1 En coordonnées cartésiennes

L'opérateur divergence en coordonnées cartésiennes (qu'il faut connaître) s'écrit

$$\operatorname{div} \overrightarrow{j_N} = \frac{\partial j_{Nx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{Ny}}{\partial y} + \frac{\partial j_{Nz}}{\partial z}$$

Dans la plupart des cas, on étudie un **système unidimensionnel** pour lequel $\overrightarrow{j_N} = j_N(x)\,\overrightarrow{e_x}$.
Alors l'équation de conservation se réduit à

$$\frac{\mathrm{d}j_N(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{j_N(x) = \text{Cste}}$$

1.2 En coordonnées cylindriques

L'opérateur divergence en cylindriques (qui n'est pas à connaître) s'écrit $\operatorname{div} \overrightarrow{j_N} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\,(r\,j_{Nr})}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\,j_{N\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial j_{Nz}}{\partial z}$.

Dans la plupart des cas, on étudie une **diffusion radiale invariante par rotation et translation** pour laquelle $\overrightarrow{j_N} = j_N(r)\,\overrightarrow{e_r}$. Alors l'équation de conservation se réduit à

$$\frac{\mathrm{d}(r\,j_N(r))}{\mathrm{d}r} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{j_N(r) = \frac{\text{Cste}}{r}}$$

1.3 En coordonnées sphériques

L'opérateur divergence en coordonnées sphériques (qui n'est pas à connaître) s'écrit

$$\operatorname{div} \overrightarrow{j_N} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\,(r^2\,j_{Nr})}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial\,(\sin\theta\,j_{N\theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial j_{N\varphi}}{\partial \varphi}$$

Dans la plupart des cas, on étudie une **diffusion radiale invariante par rotations** pour laquelle $\overrightarrow{j_N} = j_N(r)\,\overrightarrow{e_r}$.

Alors l'équation de conservation se réduit à

$$\frac{\mathrm{d}(r^2\, j_N(r))}{\mathrm{d}r} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{j_N(r) = \frac{\mathrm{Cste}}{r^2}}$$

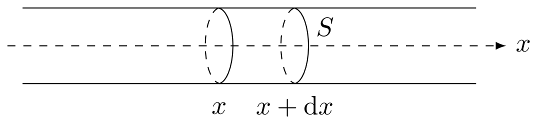
2 Sous forme intégrale

On peut retrouver ces propriétés par un raisonnement intégral. L'équation locale $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j_N} = 0$ traduit que $\overrightarrow{j_N}$ est **à flux conservatif**, ce qu'on exploite avec les raisonnements mentionnés ci-dessous pour chacun des trois systèmes de coordonnées.

2.1 En coordonnées cartésiennes

Dans la plupart des cas, on étudie un **système unidimensionnel** pour lequel

$$\overrightarrow{j_N} = j_N(x)\,\overrightarrow{e_x}$$



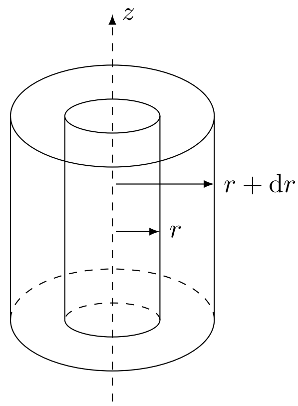
On considère le système (ouvert) entre x et $x+\mathrm{d}x$ ci-contre.

En régime stationnaire, le nombre de particules dans ce système est indépendant du temps donc le nombre de particules qui rentrent par la surface en x pendant $\mathrm{d}t$ (qui vaut $j_N(x)\,S\,\mathrm{d}t$) doit être égal au nombre de particules qui sortent par la surface en $x+\mathrm{d}x$ pendant $\mathrm{d}t$. Cela se traduit mathématiquement par **l'égalité des flux**

$$j_N(x)\,S = j_N(x+\mathrm{d}x)\,S \qquad \text{soit} \qquad j_N(x) = j_N(x+\mathrm{d}x) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}j_N(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \boxed{j_N(x) = \mathrm{Cste}}$$

2.2 En coordonnées cylindriques

Dans la plupart des cas, on étudie une **diffusion radiale invariante par rotation et translation** pour laquelle $\overrightarrow{j_N} = j_N(r)\,\overrightarrow{e_r}$.



On considère le système (ouvert) entre r et $r+\mathrm{d}r$ (de hauteur h quelconque) ci-contre.

En régime stationnaire, le nombre de particules dans ce système est indépendant du temps donc le nombre de particules qui rentrent par la surface en r (d'aire $2\,\pi\,r\,h$) pendant $\mathrm{d}t$ (qui vaut $j_N(r)\,2\,\pi\,r\,h\,\mathrm{d}t$) doit être égal au nombre de particules qui sortent par la surface en $r+\mathrm{d}r$ (d'aire $2\,\pi\,(r+\mathrm{d}r)\,h$) pendant $\mathrm{d}t$. Cela se traduit mathématiquement par **l'égalité des flux**

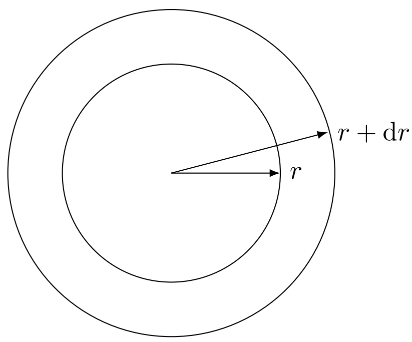
$$j_N(r)\,2\,\pi\,r\,h = j_N(r+\mathrm{d}r)\,2\,\pi\,(r+\mathrm{d}r)\,h \qquad \text{soit} \qquad r\,j_N(r) = (r+\mathrm{d}r)\,j_N(r+\mathrm{d}r)$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}(r\,j_N(r))}{\mathrm{d}r} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{j_N(r) = \frac{\mathrm{Cste}}{r}}$$

2.3 En coordonnées sphériques

Dans la plupart des cas, on étudie une **diffusion radiale invariante par rotations** pour laquelle $\overrightarrow{j_N} = j_N(r)\,\overrightarrow{e_r}$.



On considère le système (ouvert) compris entre les sphères de rayons r et $r+\mathrm{d}r$ ci-contre.

En régime stationnaire, le nombre de particules dans ce système est indépendant du temps donc le nombre de particules qui rentrent par la surface en r (d'aire $4\,\pi\,r^2$) pendant $\mathrm{d}t$ (qui vaut $j_N(r)\,4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}t$) doit être égal au nombre de particules qui sortent par la surface en $r+\mathrm{d}r$ (d'aire $4\,\pi\,(r+\mathrm{d}r)^2$) pendant $\mathrm{d}t$.

Cela se traduit mathématiquement par **l'égalité des flux**

$$j_N(r)\,4\,\pi\,r^2 = j_N(r+\mathrm{d}r)\,4\,\pi\,(r+\mathrm{d}r)^2 \qquad \text{soit} \qquad r^2\,j_N(r) = (r+\mathrm{d}r)^2\,j_N(r+\mathrm{d}r)$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}(r^2\, j_N(r))}{\mathrm{d}r} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{j_N(r) = \frac{\mathrm{Cste}}{r^2}}$$