

Calcul d'un champ magnétostatique

Tous les calculs de champ magnétostatique qui peuvent vous être demandés aux concours reposeront sur l'application du **théorème d'Ampère**. Cette fiche propose une rédaction extensive et explicite de l'application de ce théorème.

1 Théorème d'Ampère

Théorème. Le théorème d'Ampère s'écrit pour rappel

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

où \mathcal{C} est un contour fermé (ce qui est explicité par le symbole \oint sur l'intégrale) et **orienté**, $I_{\text{enlacée}}$ l'intensité électrique enlacée par le contour \mathcal{C} (algébrique, orientée par le sens du contour \mathcal{C}) et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide.

Il se lit « la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé est égale à l'intensité électrique enlacée par ce contour, multipliée par μ_0 ».

Remarque 1. Le théorème d'Ampère est une équation fondamentale de la physique (au même titre que les lois de Newton ou les principes de la thermodynamique par exemple). Elle ne se démontre donc pas. Elle n'est par contre valable que dans le cadre de la statique : lorsque les sources et/ou les champs dépendent du temps, il y a un terme en plus (voir chapitre EM7).

Remarque 2. Le théorème d'Ampère est la version intégrale de l'**équation de Maxwell-Ampère** (en statique)

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

où \vec{j} est la densité surfacique de courant. Les deux sont donc strictement équivalents et on passe de l'un à l'autre par le théorème de Stokes.

Remarque 3. C'est en fait le théorème d'Ampère qui nous apprend que les courants électriques ($I_{\text{enlacée}}$) créent des champs magnétiques (\vec{B}).

Remarque 4. Le théorème d'Ampère ne donne que la circulation du champ magnétique, et c'est généralement complètement insuffisant pour en déduire \vec{B} : c'est pour cette raison qu'on ne l'utilise en pratique que sur des situations possédant beaucoup de symétries.

2 Application du théorème d'Ampère

Un exercice typique vous demande de « calculer un champ magnétique », ce qui est souvent exprimé comme « déterminer l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace », qu'il faut comprendre comme « déterminer l'expression du champ magnétique en un point M quelconque de l'espace ». La stratégie de résolution est alors la suivante :

- Faire un schéma.** Sur ce schéma,
 - représenter la distribution des courants ;
 - placer un point M quelconque sur le schéma (le but est de calculer le champ \vec{B} en M , donc on veut voir un point M sur le schéma) ;
 - choisir un système de coordonnées (cartésien, cylindrique ou sphérique) et le représenter (attaché au point M).
- Étudier les symétries de la distribution des courants.** Cela permet de déterminer la direction de \vec{B} . Il faut pour cela réaliser les étapes suivantes :

- (a) exhiber un plan de symétrie de la distribution des courants **qui passe par M** (on veut la direction de \vec{B} en M donc les plans de symétrie qui ne passent pas par M nous sont inutiles). Il s'écrit (M, \vec{u}, \vec{v}) . **Attention, si la distribution ne présente pas de symétrie évidente, elle est probablement constituée de plusieurs morceaux qui eux en présentent : utiliser alors le théorème de superposition pour séparer le calcul du champ en plusieurs, correspondant chacun au calcul du champ dû à une partie de la distribution des courants.**
- (b) en déduire par principe de Curie que ce sont des plans d'antisymétrie pour \vec{B} ;
- (c) en déduire que \vec{B} est orthogonal à ce plan (car un champ de vecteurs est forcément orthogonal à ses plans d'antisymétrie, sinon il prendrait deux directions différentes au même point ce qui est impossible) ;
- (d) conclure sur **la direction** de \vec{B} (il est orthogonal au plan trouvé).
3. **Étudier les invariances de la distribution des courants.** Cela permet de déterminer **les variables dont \vec{B} dépend**. On réalise pour cela les étapes suivantes :
- (a) parmi les trois variables spatiales (qu'elles soient cartésiennes, cylindriques ou sphériques), trouver celles dont la distribution de courant ne dépend pas ;
- (b) en déduire par principe de Curie que le champ magnétique ne dépend pas non plus de ces variables ;
- (c) conclure sur **les variables dont \vec{B} dépend**.
4. **Appliquer le théorème d'Ampère.** Cela consiste :
- (a) à écrire le théorème d'Ampère ;
- (b) à choisir un contour (dit « d'Ampère », il est fermé et **doit être orienté**) **qui contient M** (on veut calculer le champ en M donc le contour doit passer par M) sur laquelle on appliquera le théorème. Ce contour doit vous permettre de déduire \vec{B} connaissant seulement sa circulation : cela n'est possible que si le contour est choisi intelligemment. Il doit en fait **respecter les symétries de la distribution des courants** (donc de \vec{B} par principe de Curie) ;
- (c) **dessiner ce contour d'Ampère sur le schéma ;**
- (d) **orienter ce contour d'Ampère sur le schéma ;**
- (e) calculer la circulation de \vec{B} le long de ce contour

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Commencer pour cela par préciser la forme de \vec{B} déterminée par l'analyse des symétries et des invariances, puis la direction de $d\vec{\ell}$ (toujours colinéaire au contour qui l'engendre). Si besoin décomposer le contour d'Ampère en plusieurs morceaux.

- (f) calculer le courant enlacé par le contour d'Ampère

$$I_{\text{enlacée}}$$

Dans la plupart des cas, les courants sont répartis dans un volume, on écrit alors « courant = courant surfacique $j \times$ surface à travers laquelle passe le courant à l'intérieur du contour d'Ampère ». **Dessiner la surface à l'intérieur du contour où il y a des courants** sur le schéma pour le calculer facilement. **Attention, suivant la position du point M , il peut y avoir plusieurs expressions possibles pour $I_{\text{enlacée}}$. Traiter alors chacun des cas indépendamment.**

- (g) écrire que les deux calculs précédents sont en fait égaux

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

pour en déduire l'amplitude de \vec{B} ;

- (h) conclure en précisant la direction de \vec{B} obtenue par l'analyse des symétries ;
- (i) il est généralement apprécié de tracer l'amplitude de \vec{B} en fonction de la variable dont elle dépend.

Une fois que toutes ces étapes vous paraissent limpides, vous pouvez bien sûr largement accélérer la rédaction (surtout à l'oral ; à l'écrit, restez explicites dans votre démarche et vos justifications). Veillez malgré tout à ne pas confondre concision et imprécision.