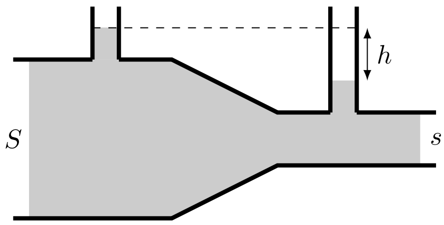
H3-TD

Dynamique des fluides parfaits

H3 — 01 Débimètre

Un fluide parfait homogène et incompressible subit un écoulement stationnaire dans une conduite de section variable (S puis s). La conduite est percée de deux tubes verticaux.



1) Expliquer qualitativement la différence de niveau entre les deux tubes.

2) Exprimer le débit volumique en fonction de g, h, S et s.

H3 — 02 Fontaine verticale

On considère un jet d'eau vertical, de diamètre $d = 11$ cm. Le débit massique du jet est 500 kg$\cdot$ s^{-1}. On suppose le fluide parfait, en écoulement incompressible. Le champ de vitesse est unidirectionnel suivant la verticale z.

1) Quelle est la pression du fluide au sommet du jet ? Et à sa base ?

2) En déduire la hauteur du jet.

H3 — 03 Forme d'un filet d'eau

(Étude du rétrécissement d'un filet d'eau à la sortie d'un robinet)

La viscosité dynamique de l'eau à température ambiante est $\eta = 1 \times 10^{-3}$ Pa$\cdot$ s. Un filet d'eau coule verticalement à l'air libre après avoir quitté un robinet de section horizontale circulaire de rayon $r_0 = 1$ cm. Le débit volumique $D = 2 \times 10^{-2}$ L$\cdot$ s^{-1} est constant dans le temps (le régime est permanent). Le filet d'eau possède une symétrie de révolution autour de l'axe vertical z ascendant. L'altitude $z = 0$ correspond à la sortie du robinet.

1) L'écoulement en sortie du robinet est-il laminaire ? En ordre de grandeur, à partir de quel débit deviendrait-il turbulent ?

En fait l'écoulement n'est pas cisaillé ici, si bien que la viscosité est sans effet. On peut donc considérer l'écoulement comme parfait dans la suite de l'exercice.

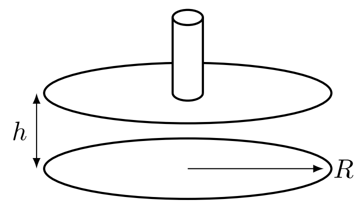
2) Justifier que la pression est la même en tout point du filet d'eau.

3) En coordonnées cylindriques, déterminer la forme $z = f(r)$ du filet d'eau.

4) Le filet d'eau finit par se scinder en gouttelettes. À quoi est dû ce phénomène ?

H3 — 04 Sustentation d'une plaque (Résolution de problème)

Deux plaques en forme de disque de rayon R sont placées horizontalement l'une au dessus de l'autre. Celle du dessus est munie d'un petit tube par lequel on peut souffler tout en la maintenant à l'horizontale.

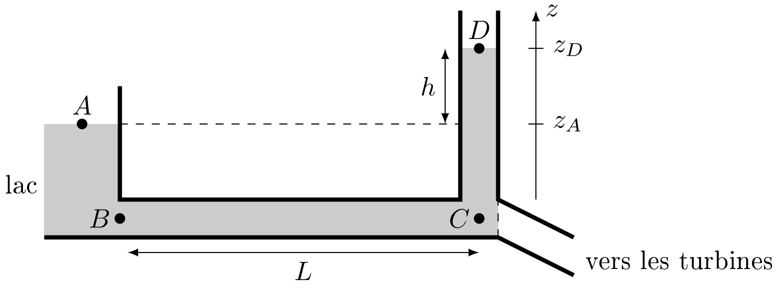


1) Montrer que, si la distance h entre les plaques est suffisamment petite, la plaque inférieure peut léviter.

Idées : On peut supposer que l'air est un fluide parfait et que l'écoulement entre les plaques est tel que, en coordonnées cylindriques, $\vec{v} = v(r)\,\vec{e_r}$ et $P(r)$.

H3 — 05 Étude d'un barrage hydroélectrique

Un barrage est constitué d'une galerie de longueur $L = 10$ km et de section $s = 10$ m^2 reliée à une retenue d'eau (lac dont on négligera les variations de niveau) et à une cheminée verticale de section $S = 100$ m^2. Une vanne alimente les turbines de la centrale électrique. L'eau est considérée comme un fluide parfait incompressible homogène de masse volumique ϱ. Le débit volumique à travers la galerie est $D_v = 30$ m$^3\cdot$s^{-1}. On appelle $h = z_D - z_A$.



1) La vanne est fermée. Déterminer la hauteur h à l'équilibre, notée h_0.

2) La vanne est ouverte depuis longtemps, l'eau s'écoule vers les turbines et $h = h_0$. On ferme alors rapidement la vanne à $t = 0$. Établir la relation liant la vitesse V dans la galerie à $\dot{h}$.

3) Intégrer l'équation d'Euler sur la ligne de courant $ABCD$. On utilisera après l'avoir justifiée l'approximation

$$\int_A^D \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \approx \int_B^C \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

En déduire l'équation différentielle

$$\ddot{h} + \frac{g\,s}{L\,S}\,h = 0$$

4) Déterminer alors $h(t)$. À quelle hauteur maximale s'élève l'eau dans la cheminée ?

Données : on fournit l'équation d'Euler

$$\varrho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{f_V}$$

H3 — 09 Relation de Bernoulli dans le cas irrotationnel instationnaire

1) Rappeler les hypothèses nécessaires à l'application du théorème de Bernoulli.

2) On cherche ici à obtenir une expression similaire, dans le cas où l'écoulement est irrotationnel mais n'est pas stationnaire. Pour cela on reprend pas à pas la démonstration du théorème du cours. Quel terme n'est plus simplifiable dans ce cas ?

3) Justifier pourquoi on peut introduire dans ce cas un potentiel des vitesses φ. Comment s'écrit le champ de vitesse en fonction de celui-ci ?

4) On rappelle la décomposition de Lamb

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,v^2 + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}$$

En déduire le théorème de Bernoulli dans le cas instationnaire mais irrotationnel

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\varrho} + g\,z = \mathrm{Cste}(t) \qquad \text{où la constante dépend du temps.}$$

H3 — 10 Implosion d'une bulle (cet exercice est une application du résultat de H3-09)

On étudie dans cet exercice un phénomène de **cavitation**, c'est-à-dire l'implosion d'une bulle sphérique de vide dans un liquide qu'on suppose parfait, homogène et incompressible. La centre de la bulle est choisie comme l'origine d'un repère sphérique. Son rayon $a(t)$ vaut a_0 à l'instant initial, et la vitesse initiale d'implosion est nulle $\dot{a}(0) = 0$. La pression loin de la bulle vaut P_0 et le champ de vitesse y est nul. Dans tout l'exercice on négligera les effets de la tension superficielle et de la pesanteur.

1) Justifier qu'on puisse considérer que le champ de vitesse s'écrit

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = v(r, t)\, \vec{e_r}$$

2) Traduire la condition aux limites pour le champ de vitesse en $r = a(t)$.

3) Traduire l'incompressibilité du fluide en terme de débit et obtenir la forme du champ de vitesse.

4) On donne le rotationnel en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(\sin\theta\, A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\, A_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\, A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}$$

Montrer que l'écoulement est irrotationnel. Vérifier qu'on peut choisir

$$\varphi(r, t) = -\frac{a^2(t)\, \dot{a}(t)}{r}$$

comme potentiel des vitesses. On donne le gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi}$$

5) Utiliser le théorème de Bernoulli dans le cas irrotationnel instationnaire et l'appliquer en $r = a(t)$.

6) On montre que l'équation précédente s'intègre en

$$a^3\,\dot{a}^2 = -\frac{2}{3}\frac{P_0}{\varrho}\,a^3 + C$$

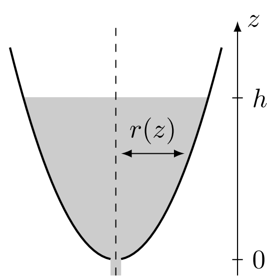
où C est une constante d'intégration. Déterminer C.

7) Obtenir alors le temps de vie de la bulle sous la forme d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à résoudre.

H3 — 06 Clepsydre

Une clepsydre est une « horloge à eau ». C'est l'équivalent pour l'eau de ce qu'est un sablier pour le sable. Il est connu que pour un sablier cylindrique vertical, la hauteur de sable diminue à vitesse constante, mais ce n'est pas le cas pour l'eau.

On cherche donc dans cet exercice la forme que doit prendre le récipient pour que la hauteur d'eau diminue à vitesse constante. L'eau est un fluide parfait homogène incompressible.



1) On considére un récipient de forme quelconque (mais présentant une symétrie cylindrique). La section du trou au fond du récipient est très petite. Justifier qu'on puisse alors considérer que le régime est stationnaire en première approximation.

2) En déduire l'expression de la vitesse au niveau de la fuite. Comment s'appelle cette relation ?

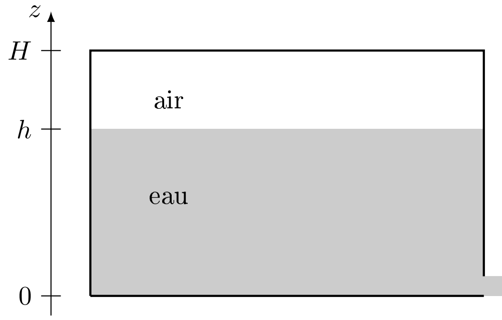
3) On revient sur l'hypothèse de stationnarité. On considère désormais le régime quasi-stationnaire, c'est-à-dire qu'on considère que h varie mais que l'expression de la vitesse au niveau de la fuite obtenue à la question 2 reste valable. On s'intéresse à la vitesse au niveau de la surface libre $V(t)$. Comment est-elle reliée à $h(t)$?

4) Obtenir une équation différentielle sur h en exploitant de nouveau la conservation de la masse.

5) Pour réaliser une clepsydre, on veut V constante. Obtenir alors la forme $r(z)$ que doit prendre le récipient.

H3 — 07 Vidange

Dans le dispositif suivant, la poche d'air qui surmonte l'eau est initialement à la pression atmosphérique P_0 et la hauteur de l'eau est h_0. L'eau est un fluide parfait homogène incompressible.



1) Décrire l'évolution de l'expérience.

2) On suppose que l'air est un gaz parfait, et que son évolution est isotherme. En déduire la pression de l'air en fonction de h, h_0, H et P_0.

3) On suppose que la section s de la fuite est très petite devant la surface libre S. Justifier qu'on puisse alors considérer que le régime est stationnaire en première approximation.

4) En déduire la vitesse de l'eau au niveau de la fuite v.

5) On s'intéresse en fait à l'évolution temporelle de $h(t)$. On va pour cela considérer que le régime est quasi-stationnaire, c'est-à-dire que l'évolution de $h(t)$ est suffisamment lente pour que l'expression de la vitesse v obtenue précédemment reste valable. Dans un premier temps, relier $\dot{h}(t)$ à v en exploitant la conservation de la masse.

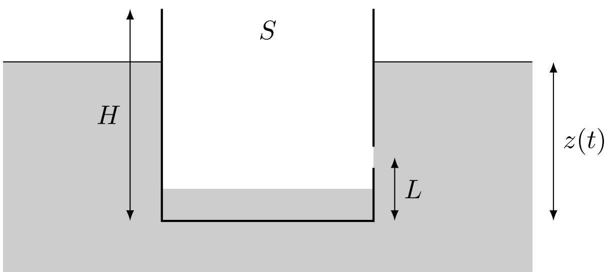
6) Obtenir alors l'équation différentielle régissant l'évolution de h.

7) Exprimer h_{eq} la hauteur de fluide pour laquelle il s'arrête de couler.

H3 — 08 Naufrage d'un bateau

La coque d'un bateau est assimilée à un parallélépipède rectangle, fermé en bas, ouvert en haut. La longueur et la largeur sont identiques et notées ℓ, la hauteur est H. La coque est percée d'un trou de section s, petite devant $S = \ell^2$, situé à une hauteur L au dessus du fond. La coque du bateau est de masse M.

On note $h(t)$ la hauteur d'eau à l'intérieur du bateau ; et $z(t)$ l'enfoncement du bateau dans l'eau. La pression atmosphérique P_0, g l'accélération de la pesanteur, μ la masse volumique de l'eau.



1) On supposera que la vitesse d'enfoncement du bateau est faible. En appliquant le théorème du centre de masse au bateau, montrer que

$$M + \mu\, S\, h(t) = \mu\, S\, z(t)$$

2) Déterminer la vitesse d'entrée $V(t)$ à la date t. On considérera qu'il existe une ligne de courant partant de la surface libre de la mer et allant jusqu'à la fuite. On justifiera que le régime peut être considéré stationnaire en première approximation.

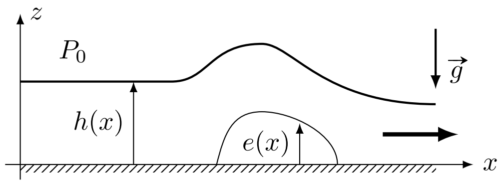
3) Obtenir le débit volumique d'eau au niveau de la fuite. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$.

4) Déterminer la date à laquelle le niveau d'eau dans le bateau atteindra le trou.

H3 — 11 Écoulement au-dessus d'un obstacle

(Nombre de Froude, écoulements fluviaux et torrentiels, transition fluvial/torrentiel)

On considère un canal rectangulaire de largeur constante L selon (Oy). L'eau s'écoule dans la direction (Ox). Le fond du canal correspond à $z = 0$, mais celui-ci présente une bosse dont le profil est modélisé par sa hauteur $e(x)$. On note x_m l'abscisse pour laquelle la bosse atteint sa hauteur maximale. On note également $h(x)$ la hauteur d'eau. L'altitude de la surface libre est ainsi $z(x) = h(x) + e(x)$. La pression atmosphérique au-dessus du canal est P_0.



L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible de masse volumique μ. Le champ de vitesse est supposé pour simplifier unidirectionnel et uniforme sur une section droite de l'écoulement $\vec{v} = v(x)\,\vec{e_x}$.

1) Ce champ de vitesse vous paraît-il raisonnable ? Quelle vitesse cherche-t-on en fait à décrire en faisant les hypothèses d'uniformité et d'unidirectionnalité ?

2) Justifier l'emploi du théorème de Bernoulli et l'appliquer sur une ligne de courant bien choisie. Prendre ensuite la dérivée de cette équation par rapport à x pour obtenir une première relation d'intérêt.

3) Que peut-on dire du débit volumique ? En déduire une deuxième relation d'intérêt.

4) Démontrer que

$$\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(v^2 - g\,h) + g\,\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}x} = 0$$

5) On appelle **nombre de Froude** la grandeur adimensionnée

$$\mathcal{F} = \frac{v}{\sqrt{g\,h}}$$

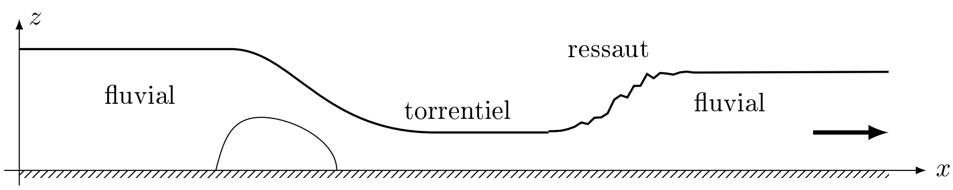
Ce nombre compare la vitesse de l'écoulement v à la célérité $\sqrt{g\,h}$ des ondes de surfaces (vagues) dans un bassin de profondeur h (voir TD H4-09). Dans le cas où le nombre de Froude est plus petit que 1 (faible vitesse, grande hauteur : on parle d'**écoulement fluvial**), montrer que $h(x)$ passe par un minimum en $x = x_m$. Représenter l'allure de la surface libre dans ce cas.

6) Dans le cas où le nombre de Froude est plus grand que 1 (grande vitesse, faible hauteur : on parle d'**écoulement torrentiel**), montrer que $h(x)$ passe par un maximum en $x = x_m$. Représenter l'allure de la surface libre dans ce cas.

Remarque. Un régime torrentiel est tel que l'écoulement est « plus rapide que les vagues » : en d'autres termes, les ondes à la surface ne peuvent dans ce cas pas remonter le courant. Si vous jetez un caillou dans l'eau dans un torrent, les ondes ne remonterons pas celui-ci, contrairement au cas où vous lanceriez un caillou dans un fleuve. C'est en partie ces comportements que le nombre de Froude permet de distinguer, de la même manière que le nombre de Reynolds compare des écoulements laminaires et turbulents.

Remarque. Partant d'un régime fluvial $v < \sqrt{g\,h}$, à l'approche de l'obstacle l'écoulement accélère (par conservation du débit) et la hauteur d'eau diminue (comme vous venez de le démontrer et de le schématiser). Il se peut alors qu'à la traversée de l'obstacle, le nombre de Froude devienne plus grand que 1 : l'obstacle a permis à l'écoulement de transiter depuis un régime fluvial vers un régime torrentiel, situation qu'on schématise ci-dessous (début de l'écoulement). L'inverse est également possible (passage d'un régime torrentiel en amont à un régime fluvial en aval) mais dans ce cas la transition se fait généralement à travers un **ressaut hydraulique** (voir TD H4-05), qui est une zone très turbulente.

Remarque. Par ailleurs, les régimes torrentiels sont souvent instables : dans le cas où un obstable permet à un écoulement de transiter d'un régime fluvial en amont à un régime torrentiel en aval, on observe très souvent en aval de l'obstacle un **ressaut hydraulique spontané** qui fait repasser l'écoulement dans un régime fluvial, comme schématisé ci-dessous (et voir aussi l'image de ce phénomène sur la Reyssouze au TD H4-05).



H3 — 12 Arrachage d'un toit lors d'une tempête

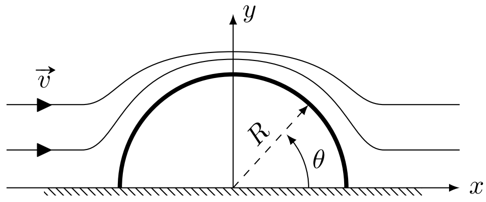
Une serre est protégée par une sorte de toiture en forme de demi cylindre de longueur L, grande devant son rayon R. Une violente tempête engendre un vent qui est horizontal loin de la serre, de vitesse orthogonal à l'axe du cylindre et de module V_0.

L'écoulement est pratiquement incompressible et irrotationnel, de sorte que le champ de vitesse est le gradient d'un potentiel des vitesses φ, qui s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\varphi(r,\,\theta) = \left(A\,r + \frac{B}{r}\right)\cos\theta$$

où A et B sont des constantes. L'air est modélisé par un fluide parfait, de masse volumique μ.

1) Calculer A et B à partir des conditions aux limites.



2) Comment trouver la pression en tout point de l'espace ? On admettra que la pression loin de la toiture est uniforme égale à P_0 et on négligera l'influence de la pesanteur.

3) On admet qu'un manque d'étanchéité impose que la pression à l'intérieur de la serre est celle du point d'arrêt A au pied de la serre du côté du vent. En déduire le module F de la force de pression qui s'exerce sur la toiture.

4) Comparer P_0 au rapport $F\,/\,S$ où S est la surface au sol de la sphère.

Données. $P_0 = 1{,}0$ bar, $\mu = 1{,}3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et $V_0 = 140$ km/h. On donne le gradient en cylindrique

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e_r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e_z}$$

On donne aussi l'élément d'intégration en cylindrique à rayon R constant $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta$, puis on donne l'expression (qu'on pourra démontrer pour s'entraîner au calcul)

$$\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}$$

H3 — 03 Forme d'un filet d'eau (solution)

On détermine

$$z(r) = \frac{D^2}{2\,\pi^2\,g}\left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4}\right)$$