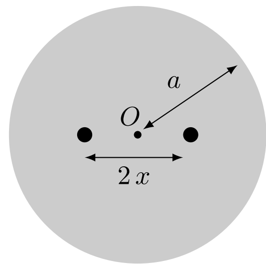
EM 1/2/3 - TD

Électrostatique

- Calculs de champs et de potentiels électriques : 01, 02, 03, 05, 06, 07, 09, 11, 13, 16 ;
- Gravitation : 04, 12, 14, 15 ;
- Autres : 08, 10.

EM1 — 01 Un modèle électrostatique de la molécule H_2

On suppose que dans la molécule de dihydrogène H_2 la répartition de charge peut être modélisée de la façon suivante : les noyaux sont assimilés à deux charges ponctuelles q situées symétriquement sur l'axe (Ox) aux abscisses $-x$ et $+x$; et le nuage électronique est quant à lui assimilé à une boule de centre O et de rayon a, portant la charge $-2\,q$ uniformément répartie dans son volume.



1) Calculer la force totale qui s'exerce sur l'un des noyaux.

2) En déduire la longueur de la liaison H−H à l'équilibre.

EM1 — 02 Distribution de charge sphérique

Une boule de centre O et de rayon $R = 1{,}5$ cm contient une distribution volumique de charge $\rho_e(r)$ qui n'est fonction que de la distance au centre r.

1) Analyser les symétries et invariances de cette distribution de charge. En déduire la forme du champ $\vec{E}$.

2) On suppose que la charge totale portée par la boule est $Q = 0{,}1$ mC. Exprimer le champ $\vec{E}$ en tout point à l'extérieur de la boule. Calculer le champ à une distance $r_0 = 1{,}0$ m du centre de la boule.

3) Donner le champ en un point à l'intérieur de la boule à l'aide d'une intégrale faisant intervenir $\rho_e(r)$. On rappelle qu'un élément de volume $\mathrm{d}V$ s'écrit en sphérique $\mathrm{d}V = r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

4) On a $\rho_e(r) = \rho_0\,(1 - r/R)$. Exprimer ρ_0 en fonction de Q et R, puis déterminer le champ $\vec{E}$ en tout point à l'intérieur de la boule.

EM1 — 03 Détermination d'une répartition de charge

On considère une répartition volumique de charge $\rho(r)$ présentant une symétrie sphérique, contenue à l'intérieur d'une boule de centre O et de rayon R.

1) Déterminer la densité de charge $\rho(r)$ pour que le champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur de la boule soit de norme constante $\vec{E} = E_0\,\vec{e_r}$.

2) En déduire la charge totale Q de la boule. Déterminer finalement le champ électrique $\vec{E}$ à l'extérieur de la boule.

Indication : Le théorème de Gauss sert habituellement à obtenir $\vec{E}$ connaissant ρ. La question 1 demande ici de faire l'inverse : déduire ρ connaissant $\vec{E}$. Il faut donc chercher à exploiter le théorème de Gauss « à l'envers ». Cherchez par exemple à écrire une expression différentielle du théorème, plutôt que sa version intégrale.

EM1 — 04 Champ gravitationnel dans une grotte

La Terre est assimilée à une boule de centre O et de rayon R_T, de masse volumique ρ homogène. Une grotte sphérique de centre O_1 et de rayon a est creusée en profondeur.

1) Calculer le champ gravitationnel en tout point à l'intérieur de la grotte.

2) La grotte contient un lac. Dessiner sa surface libre.

EM1 — 05 Champ électrique d'un cylindre (TD - Cours)

On considère un cylindre infini d'axe (Oz) et de rayon R uniformément chargé, avec une densité volumique de charges ϱ.

1) Quel système de coordonnées faut-il utiliser ?

2) Par une étude des symétries et des invariances de la distribution de charge, montrer que le champ électrostatique s'écrit $\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}$.

3) Calculer le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. Représenter l'amplitude $E(r)$ du champ en fonction de r.

4) En déduire le champ d'un fil infini, chargé uniformément avec une charge linéïque λ.

5) On revient au cylindre uniformément chargé. Obtenir le potentiel électrostatique créé par le cylindre, en choisissant $V(0) = 0$. Peut-on ici choisir plutôt $V(\infty) = 0$ comme on ferait habituellement ?

6) On considère maintenant un cylindre creux, uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ créé en tout point de l'espace par cette distribution.

EM1 — 06 Modélisation d'un nuage mince et orage

On considère un nuage, qu'on modélise comme un plan infini $z = h$. Il est chargé avec une densité surfacique de charge σ négative.

1) Déterminer le champ électrique engendré par le nuage dans tout l'espace.

2) Le sol est le plan $z = 0$. Il est chargé avec une densité surfacique de charge $-\sigma$. Calculer alors le champ électrique entre $z = 0$ et $z = h$.

3) En déduire le potentiel électrique entre $z = 0$ et $z = h$. On prendra la constante telle que $V(0) = 0$.

4) Le nuage est un carré de 10 km de côté. Il est à une altitude $h = 2$ km. Un éclair se produit lorsque le champ électrique dépasse le **champ disruptif de l'air**, c'est-à-dire le champ pour lequel l'air devient conducteur. Le champ disruptif de l'air humide est typiquement

$$E_{\text{dis}} = 10 \ \text{kV} \cdot \text{cm}^{-1}$$

Calculer alors le potentiel $V(h)$ du nuage lors d'un orage.

EM1 — 11 Potentiel de Yukawa

On étudie le potentiel électrostatique à symétrie sphérique suivant :

$$V(r) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r}\,\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

où Q et a sont des constantes positives. Ce potentiel est appelé potentiel de Yukawa, du nom d'un physicien japonais. Il peut être utilisé pour modéliser la répartition de charge dans un atome léger par exemple.

1) Déterminer les unités de Q et a.

2) Déterminer le champ électrostatique correspondant.

3) En déduire la charge $q(r)$ contenue dans la boule de rayon r centrée en O. Étudier les cas $r \to 0$ et $r \to \infty$. Donner une interprétation de a.

4) Déterminer la densité volumique de charge $\varrho(r)$.

Données : Le volume en coordonnées sphériques d'une coquille comprise entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ est $4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r$.

EM1 — 07 Champ électrique d'une plaque épaisse

1) Une plaque épaisse infinie, située entre les plans $z = -a$ et $z = a$, porte une densité volumique de charge uniforme μ. Déterminer le champ électrique créé par la plaque dans tout l'espace.

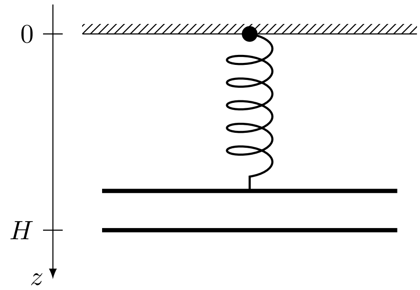
2) On considère un milieu infini, repéré en coordonnées cartésiennes, dans lequel est répartie une densité volumique de charge

$$\varrho(z) = \varrho_0 \, \frac{z}{a}$$

Calculer le champ électrostatique partout dans l'espace, ainsi que le potentiel électrostatique.

EM1 — 08 Équilibre de deux plaques (Résolution de problème)

Dans le dispositif suivant, la plaque inférieure est fixée en $z = H$ et possède une charge totale $-q$. La plaque supérieure est susceptible de se déplacer le long de l'axe z. Elle est reliée à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ; et elle porte une charge totale $+q$. Sa masse est notée m. Les deux plaques sont considérées infiniment fines, de surface S. On considérera S très grande pour mener les calculs de champ électrostatique.



1) Déterminer la distance e entre les deux plaques à l'équilibre.

EM1 — 09 Condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est constitué de deux armatures supposées infiniment fines, cylindriques coaxiales d'axe (Oz), de hauteur h et de rayons respectifs $a_1 < a_2$. On fera l'hypothèse pour le calcul du champ que les cylindres sont de hauteur infinie. Le cylindrique intérieur porte une charge totale $+q$, le cylindre extérieur porte la charge $-q$.

1) Déterminer le champ électrostatique entre les deux armatures du condensateur. Que vaut-il à l'extérieur ?

2) En déduire le potentiel électrostatique entre les deux armatures du condensateur.

3) Déterminer enfin sa capacité C.

Données : L'opérateur gradient en cylindrique est

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}$$

EM1 — 10 Écartement des armatures d'un condensateur plan

Les armatures d'un condensateur plan sont deux plaques métalliques carrées, de côté $a = 30$ cm, distantes de $e_1 = 1$ cm. On charge le condensateur sous une tension $U_1 = 2$ kV.

1) Une fois chargé, le condensateur est isolé de la source de tension. On éloigne les armatures jusqu'à ce qu'elles soient distantes de $e_2 = 3$ cm. Quelle est la tension finale aux bornes du condensateur ?

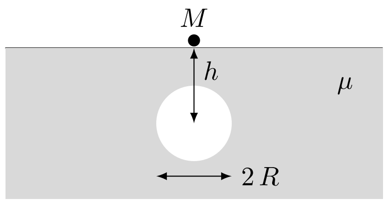
2) Calculer le travail fourni par l'opérateur lors de cette étape.

3) Comparer avec la variation d'énergie emmagasinée dans le condensateur.

EM1 — 12 Sondage des sols par gravimétrie

La gravimétrie est l'étude et la mesure très fine du champ de pesanteur local. Des mesures gravimétriques sur le terrain permettent de détecter des anomalies gravitationnelles dans le sous-sol pouvant avoir diverses origines. Couplée généralement à d'autres techniques (telles que des forages ou des études sismiques), la gravimétrie permet de localiser des cavités, des failles,...

On considère une cavité dans un milieu très poreux (du calcaire par exemple, masse volumique μ), supposée sphérique de rayon R, dont le centre se situe à une profondeur h. Cette cavité a été créée par la lente dissolution de la roche et par un écoulement souterrain, qui évacue au fur et à mesure les matières dissoutes. La détection de ce type de cavité est très importante dans le domaine du génie civil avant la construction de grandes structures (ponts, immeubles,...) construites à la surface.



1) À l'aide du principe de superposition et du théorème de Gauss, exprimer la variation du champ de pesanteur (appelée « anomalie gravimétrique ») à la verticale du centre de la cavité (point M sur la figure) du fait de sa présence.

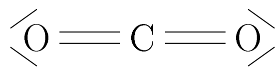
En gravimétrie, on utilise une unité spéciale, le Gal, pour quantifier l'anomalie gravitationnelle, avec pour définition $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$. Un gravimètre « de terrain » a typiquement une précision de 10 μGal.

2) Ce gravimètre est-il capable de détecter une cavité de 8 m de diamètre et dont le centre est situé à 12 m de profondeur ? On prendra une masse volumique du calcaire égale à $\mu = 2{,}6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Donnée. On donne la constante de gravitation $G = 6{,}67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$.

EM1 — 13 Champ électrostatique créé par le dioxyde de carbone

On considère la molécule de dioxyde de carbone CO_2. C'est une molécule linéaire, dont on représente la structure de Lewis ci-dessous.



L'oxygène étant plus électronégatif que le carbone, les deux atomes portent une charge partielle $-\delta q$.

1) Quelle est la charge partielle portée par l'atome de carbone ?

2) Calculer le moment dipolaire $\vec{p}$ de la molécule.

3) On considère l'axe z vertical ascendant, et des axes x et y cartésiens associés. L'atome de carbone est placé en $(0, 0, 0)$, tandis que les deux atomes d'oxygène sont en $(0, 0, \pm a/2)$. On souhaite calculer le champ électrique créé par cette distribution de charge. On utilisera les coordonnées sphériques (r, θ, φ). On se place dans le cadre de l'approximation dipolaire. Rappeler ce que cela signifie.

4) Calculer le potentiel électrostatique $V(r, \theta, \varphi)$ créé par la molécule de CO_2 dans l'approximation dipolaire.

5) On donne le gradient en sphérique

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

En déduire le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par le dioxyde de carbone.

6) Qualitativement, comment évolue la norme de $\vec{E}$ en fonction de r ? Une telle dépendance est caractéristique d'un champ **quadripolaire**, c'est-à-dire un champ créé par une distribution de charge neutre et sans moment dipolaire.

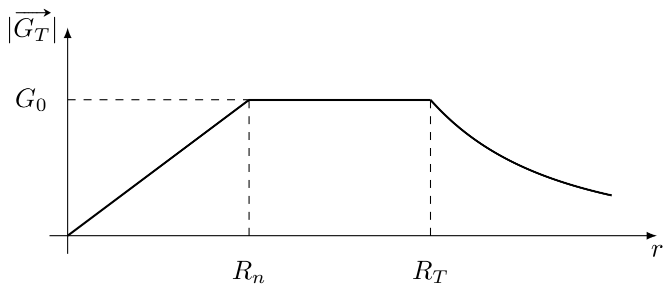
7) Question de cours. Comment évolue, en fonction de r, le potentiel et la norme d'un champ électrostatique monopolaire (créés par une charge électrostatique) ? et ceux d'un champ dipolaire (créés par un dipôle électrostatique) ? Comparer avec le champ quadripolaire.

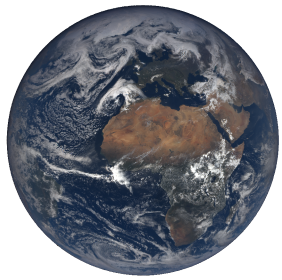
EM1 — 14 Champ de gravitation terrestre

On assimile la Terre à une boule de centre O, de rayon $R_T = 6{,}38 \times 10^3$ km et de masse $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg.

1) Dans un premier temps, on suppose que la masse est uniformément répartie dans tout le volume. Calculer la masse volumique ρ_T, puis déterminer le champ gravitationnel terreste $\overrightarrow{G_T}$ en tout point de l'espace. En tracer une représentation graphique et donner la valeur du champ gravitationnel à la surface de la Terre.

2) En réalité, la masse n'est pas uniformément répartie. Dans un modèle plus élaboré, la Terre est toujours à symétrie sphérique, mais la masse est répartie entre un noyau de rayon $R_n = 3{,}50 \times 10^3$ km plus dense, et le manteau ($R_n < r < R_T$). Le champ gravitationnel résultant est réprésenté ci-dessous





Justifier que le champ gravitationnel pour $r \geqslant R_T$ n'est pas modifié.

3) Montrer que la figure est compatible avec l'hypothèse d'un noyau homogène.

4) On s'intéresse au manteau et on cherche à déterminer la répartition de masse à l'intérieur de celui-ci. Pour cela, calculer $\Phi(r)$ le flux de $\overrightarrow{G_T}$ à travers une sphère de rayon r (comprise entre R_n et R_T).

5) Calculer alors $\mathrm{d}\Phi \,/\, \mathrm{d}r$ de deux manières différentes. En déduire la masse volumique $\rho(r)$ dans le manteau.

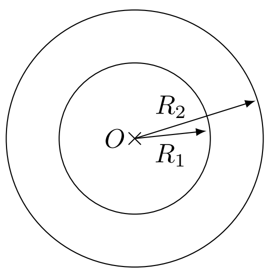
6) Calculer numériquement $\rho(R_n)$ et $\rho(R_T)$.

EM1 — 15 Terre plate (Résolution de problème)

1) Dans les temps anciens, on pensait que la Terre était plate. En modélisant cette ancienne Terre par une couche plane infinie d'épaisseur H, trouver H pour que le champ gravitationnel à sa surface soit identique au champ sur la Terre réelle. On supposera les densités de masse uniformes et similaires dans les deux cas.

EM1 — 16 Condensateur sphérique

Un condensateur sphérique est constitué de deux armatures sphériques concentriques de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$. L'armature intérieure 1 porte la charge $+Q$ uniformément répartie en surface. L'armature extérieure 2 porte la charge $-Q$ uniformément répartie en surface. On travaille en coordonnées sphériques, et on considère un régime statique.



1) Par des arguments clairs et précis d'invariances et de symétries, justifier qu'entre les armatures le champ électrostatique prend la forme $\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}$.

2) Déterminer l'expression du champ $\vec{E}$ entre les armatures, en fonction de Q, r et ε_0.

3) En déduire la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les armatures en fonction de Q, R_1, R_2 et ε_0.

4) Donner alors l'expression de la capacité C du condensateur sphérique en fonction de R_1, R_2 et ε_0.