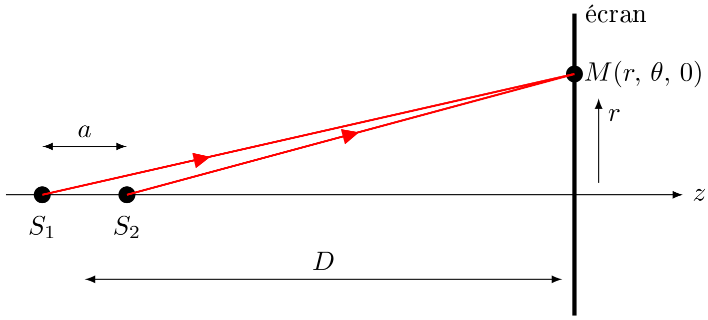
OP3-TD

Correction

OP3 – 04 Autre montage interférentiel : sources alignées

1) Les deux sources S_1 et S_2 sont cohérentes d'après l'énoncé. Elles donnent donc lieu à des interférences à l'écran.



Par ailleurs, les sources étant alignées sur l'axe z, celui-ci constitue un axe de symétrie de révolution du dispositif. Le motif d'interférence doit également posséder cette symétrie (si on tourne autour de l'axe z, cela ne change rien aux sources donc ça ne doit rien changer aux interférences engendrées par ces sources). On en déduit que la figure d'interférence est symétrique par rotation autour de l'axe z, donc les **franges sont forcément circulaires**.

Pour repérer un point M sur l'écran, il est donc préférable vu la symétrie des franges d'utiliser un **système de coordonnées cylindriques** d'axe z d'origine l'écran. Dans ce système, les coordonnées des points d'intérêt sont

$$S_1(0,\,0,\,-D-a/2), \qquad S_2(0,\,0,\,-D+a/2) \qquad \text{et} \qquad M(r,\,\theta,\,0).$$

(La coordonnée θ des sources sur l'axe ($r=0$) n'est pas définie, on l'écrit égale à 0 ici.)

2) Puisque les sources sont cohérentes, l'éclairement total à l'écran est donné par la **formule de Fresnel**. En supposant les éclairements des deux sources identiques $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0$, elle s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = 2\,\mathcal{E}_0\left(1+\cos\left(\frac{2\,\pi\,\delta}{\lambda_0}\right)\right)$$

où δ est la différence de marche $\delta = \mathcal{L}(S_1M) - \mathcal{L}(S_2M)$. Puisque la lumière se propage ici uniquement dans l'air d'indice $n=1$, on la calcule directement :

$$\delta = \mathcal{L}(S_1M) - \mathcal{L}(S_2M) = n\,(S_1M - S_2M) = S_1M - S_2M$$

La distance S_1M s'écrit par théorème de Pythagore

$$S_1M = \sqrt{r^2 + (-D-a/2)^2} = D\sqrt{1+\frac{r^2}{D^2}+\frac{a}{D}+\frac{a^2}{4\,D}}$$

Pour simplifier on utilise ensuite un développement limité, suggéré par l'énoncé par le fait que $x,\,y \ll D$ donc $r \ll D$, et $a \ll D$:

$$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}+\frac{\varepsilon^3}{16} \qquad \text{pour } \varepsilon \text{ petit.}$$

On a ainsi

$$S_1M = D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{D^2}+\frac{a}{D}+\frac{a^2}{4\,D}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{r^2}{D^2}+\frac{a}{D}+\frac{a^2}{4\,D}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{r^2}{D^2}+\frac{a}{D}+\frac{a^2}{4\,D}\right)^3\right)$$

et par symétrie $a \leftrightarrow -a$, on devine

$$S_2M = D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{D^2}-\frac{a}{D}+\frac{a^2}{4\,D}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{r^2}{D^2}-\frac{a}{D}+\frac{a^2}{4\,D}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{r^2}{D^2}-\frac{a}{D}+\frac{a^2}{4\,D}\right)^3\right)$$

Au premier ordre non nul en r *(ce qui permet de ne pas calculer tous les termes ! ceux d'ordre supérieur à trois peuvent être oubliés directement)*, on trouve à partir de ces deux expressions

$$\delta = S_2M - S_1M \approx a - \frac{a\,r^2}{2\,D^2} = a\left(1 - \frac{r^2}{2\,D^2}\right)$$

L'éclairement est finalement

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{tot}} = 2\,\mathcal{E}_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\,\pi\,a}{\lambda_0}\left(1 - \frac{r^2}{2\,D^2}\right)\right)\right)}$$

Remarque. Il ne dépend que de r, donc les lignes iso-éclairement (c'est-à-dire les franges) sont des lignes $r =$ Cste donc des cercles, comme attendu par l'argument de symétrie.

Pour déterminer l'interfrange, on trouve les rayons des franges d'ordre d'interférence p successifs m et $m+1$.

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = m \qquad \text{donne} \qquad \frac{a}{\lambda_0}\left(1 - \frac{r_m^2}{2\,D^2}\right) = m \qquad \text{d'où} \qquad r_m = D\sqrt{2\left(1 - \frac{m\,\lambda_0}{a}\right)}$$

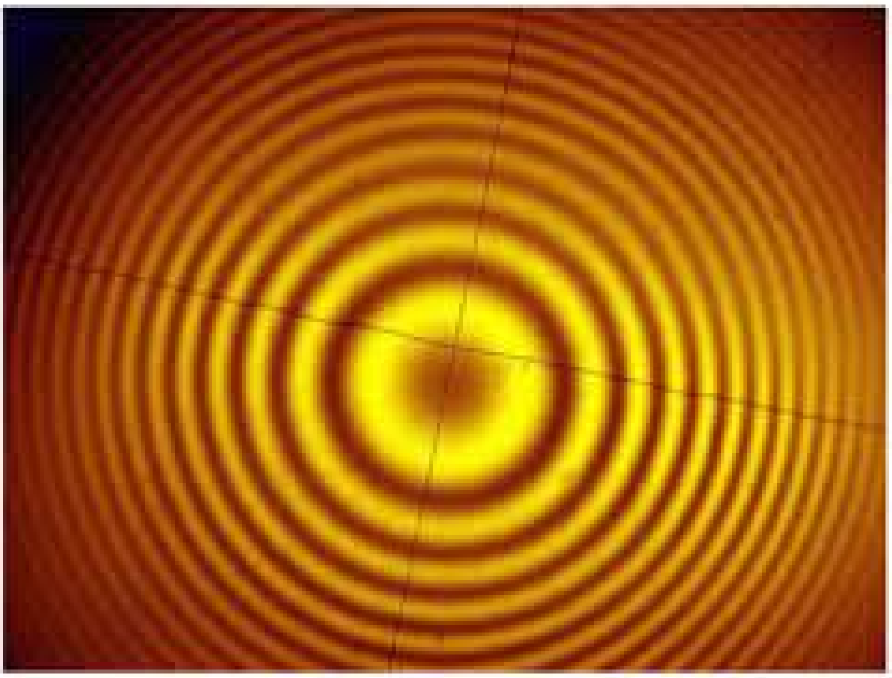
et donc

$$r_{m+1} = D\sqrt{2\left(1 - \frac{(m+1)\,\lambda_0}{a}\right)}$$

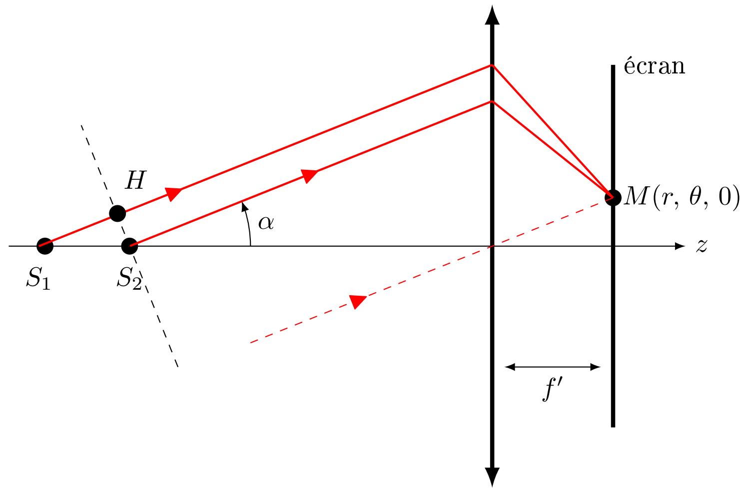
La différence des deux en valeur absolue donne l'interfrange

$$\boxed{i = |r_{m+1} - r_m| = \sqrt{2}\,D\left\{\sqrt{1 - \frac{m\,\lambda_0}{a}} - \sqrt{1 - \frac{(m+1)\,\lambda_0}{a}}\right\}}$$

et ici rien ne se simplifie, contrairement au cas des trous d'Young. Notamment, i dépend de m donc on comprend que **la distance interfrange n'est pas constante** (en fait, elle diminue à mesure qu'on s'éloigne du centre). La figure d'interférence ressemble à



3) Pour observer les interférences à l'infini, **on place l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente.** Dans ce cas, le montage est



Et la différence de marche δ se détermine en voyant qu'après un principe de retour inverse de la lumière, S_2 et H sont sur la même surface d'onde donc

$$\delta = \mathcal{L}(S_1M) - \mathcal{L}(S_2M) = \mathcal{L}(S_1H) + \mathcal{L}(HM) - \mathcal{L}(S_2M) = \mathcal{L}(S_1H) = S_1H$$

car $\mathcal{L}(HM) = \mathcal{L}(S_2M)$. Ensuite directement

$$S_1H = a\,\cos\alpha \approx a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

au premier ordre non nul en α, et

$$\tan\alpha \approx \alpha \qquad \text{or} \qquad \tan\alpha = \frac{r}{f'}$$

d'où

$$\delta = a\left(1 - \frac{r^2}{2\,f'^2}\right)$$

qui est la même différence de marche que celle du montage précédent, en remplaçant $D \leftrightarrow f'$. On déduit alors directement que les nouvelles interfranges sont

$$\boxed{i = \sqrt{2}\,f'\left\{\sqrt{1 - \frac{m\,\lambda_0}{a}} - \sqrt{1 - \frac{(m+1)\,\lambda_0}{a}}\right\}}$$

(qui a nouveau dépend de la frange m : les anneaux sont de plus en plus resserés à mesure qu'on s'éloigne du centre).