OP2-TD

Correction

OP2 — 03 Largeur spectrale et effet Doppler

1) Le lien entre longueur d'onde λ_0 et fréquence f_0 est

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} \qquad \text{avec} \qquad c \text{ la célérité de la lumière dans le vide.}$$

Attention. *Ne pas en conclure trop vite que $\Delta f = c / \Delta\lambda$, ce n'est pas aussi simple, car évidemment*

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a-b}$$

Par contre $\Delta f = f(\lambda_0) - f(\lambda_0 + \Delta\lambda)$ d'où

$$\Delta f = \frac{c}{\lambda_0} - \frac{c}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\left(1 - \frac{1}{1 + \Delta\lambda/\lambda_0}\right) \approx \frac{c}{\lambda_0}\left(1 - \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta f = \frac{c\,\Delta\lambda}{\lambda_0^2}}$$

après un développement limité car $\Delta\lambda \ll \lambda_0$. L'application numérique donne $\Delta f = 1{,}00$ GHz. Ensuite, le temps de cohérence τ de la source est donné par

$$\tau \approx \frac{1}{\Delta f} = 9{,}94 \times 10^{-10} \text{ s},$$

puis sa longueur de cohérence temporelle est

$$\boxed{\ell_c = c\,\tau = 29 \text{ cm.}}$$

Remarque. *Une autre idée est de* ***voir les largeurs comme des petites variations****, c'est-à-dire des dérivées. La dérivée de f_0 par rapport à λ_0 est*

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\lambda_0} = -\frac{c}{\lambda_0^2} \qquad \textit{soit} \qquad \mathrm{d}f_0 = -\frac{c}{\lambda_0^2}\,\mathrm{d}\lambda_0$$

Et on interprète les différentielles $\mathrm{d}f_0$ et $\mathrm{d}\lambda_0$ comme des variations finies (= non infinitésimales)

$$\boxed{\Delta f = \frac{c}{\lambda_0^2}\,\Delta\lambda}$$

Cela revient encore à faire un développement limité à l'ordre 1 sur $f_0(\lambda_0)$. Remarquez qu'on fait disparaître « à la main » le signe − car on définit les variations Δf et $\Delta\lambda_0$ positives.

2) On conclut directement par l'expression rappelée que

$$\boxed{v = c\,\frac{\Delta f}{f_0}} \qquad \text{avec} \qquad f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 5{,}49 \times 10^{14} \text{ Hz.}$$

On détermine $v = 549 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Commentaire. Cette vitesse se retrouve en ordre de grandeur par la thermodynamique. L'expression de l'énergie cinétique moyenne d'une particule d'un gaz monoatomique (masse m) de température T s'écrit

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{3}{2}\,k_B\,T$$

avec k_B la constante de Boltzmann et v^2 la vitesse quadratique moyenne des atomes. On obtient

$$v = \sqrt{\frac{3\,k_B\,T}{m}} \approx 248 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

pour $T = 500$ K (température proposée qualitativement : le gaz dans la lampe est chaud, mais quelle est sa température ?...) et $m = 3{,}34 \times 10^{-25}$ kg (mercure).

D'ailleurs, la température qui donnerait la même vitesse que celle obtenue par décalage Doppler $v = 549$ m·s^{-1} est

$$T = \frac{m\,v^2}{3\,k_B} \qquad \textit{soit} \qquad T = 2430 \text{ K.}$$