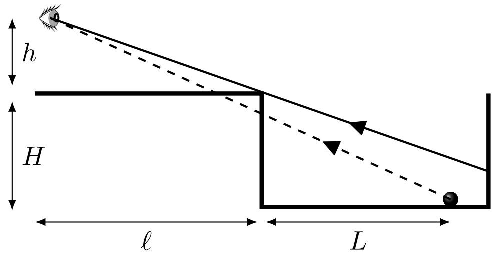
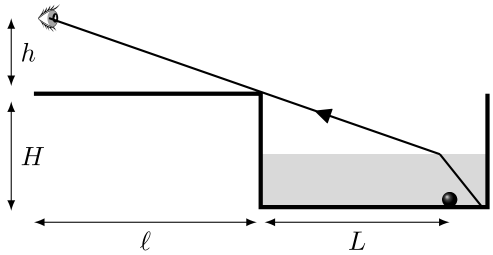
OP1-TD

Correction

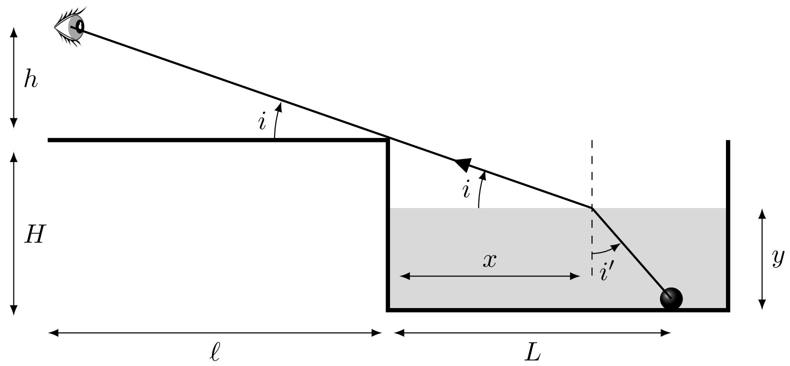
OP1 — 14 Piscine (Résolution de problème)

L'exercice n'a d'intérêt que si l'on ne peut pas voir la pièce lorsque la piscine est vide *(car sinon on peut toujours voir la pièce, quelque soit la hauteur d'eau dans la piscine)*. Dans ce cas, le rayon lumineux allant de la pièce à l'œil est bloqué par le bord de la piscine (en traitillés sur la figure de gauche). Le rayon le plus incliné possible sera toujours celui qui rase le bord de la piscine (en traits pleins sur la figure de gauche).





À mesure que l'on remplit la piscine, le phénomène de réfraction permet au rayon rasant le bord de se rapprocher de plus en plus de la pièce *(l'indice de l'eau est plus grand que celui de l'air donc l'angle réfracté est plus petit que l'angle incident)*, voir la figure de droite. Considérant ces réflexions préliminaires, on est amenés à travailler sur la situation suivante, où on note y la hauteur d'eau recherchée.



Cette résolution de problème est convenablement posée lorsque ce schéma est fait. Il ne reste qu'à écrire la loi de Descartes pour la réfraction au niveau de l'interface air/eau. On considère $n_{\text{air}} = 1$ et $n_{\text{eau}} = n = 1{,}33$. On a alors

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \cos i = n\,\sin i'} \qquad (1)$$

Or $\cos i$ est une constante du problème ici, puisque c'est

$$\cos i = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + h^2}} \qquad (2)$$

Et par ailleurs on a aussi géométriquement

$$\sin i' = \frac{L - x}{\sqrt{y^2 + (L-x)^2}} \qquad (3)$$

Si on fait un bilan du nombre d'équations et du nombre d'inconnues, on en compte respectivement une (la loi de Descartes) et deux (x et y). Pour fermer le problème, il nous faut une autre équation, qui relie x et y. Sur le schéma, on voit géométriquement qu'on peut exprimer $\tan i$ de deux manières différentes

$$\tan i = \frac{h}{\ell} \qquad \text{mais aussi} \qquad \tan i = \frac{H-y}{x} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x = \frac{\ell\,(H-y)}{h}} \qquad (4)$$

Pour conclure, on utilise (4) dans (3) pour n'exprimer $\sin i'$ qu'en fonction de y, puis on utilise (2) et (3) pour expliciter (1). On tombe sur

$$\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+h^2}} = n\,\frac{L - \dfrac{\ell\,(H-y)}{h}}{\sqrt{y^2 + \left(L - \dfrac{\ell\,(H-y)}{h}\right)^2}}$$

qui permet d'exprimer y... On voit tout de suite qu'en passant l'équation au carré on tombe sur un polynôme de degré 2 en y, mais le calcul paraît looooooong. **On se facilite la tâche en prenant la situation particulière où $\ell = h$.** On aboutit dans ce cas à

$$y^2 + y\,\frac{2\,n^2-1}{n^2-1}\,(L-H) + \frac{(L-H)^2}{2}\,\frac{2\,n^2-1}{n^2-1} = 0$$

Pour les mêmes raisons de complications inutiles, on ne cherche pas à expliciter les racines formelles de ce polynôme. **Prenons par contre un exemple numérique, avec les valeurs suivantes :** $\ell = h$, $L = 2$ m et $H = 2{,}5$ m. On obtient alors

$$\boxed{y = 1{,}34 \text{ m.}}$$

Notons pour conclure que **la valeur trouvée est une valeur minimale pour la hauteur d'eau**. Si la piscine est remplie plus conséquemment, on continue de voir la pièce simplement en regardant un peu plus haut que le rayon rasant le bord.

Remarque. L'hypothèse que nous avons posée ($\ell = h$) n'est évidemment pas du tout nécessaire à la résolution du problème, et on aurait pu rester général sans difficultés supplémentaires. La fonction `eq` inscrite dans le code python serait juste plus longue.

Le résultat numérique a été obtenu avec le programme python suivant, qui utilise la méthode `fsolve` de la bibliothèque `scipy`. On peut trouver des informations sur cette bibliothèque par exemple `à cette adresse`.

```
from scipy import optimize as scpo

n = 1.33
H = 2.5
L = 2.

alpha = (2. * n**2. - 1.) / (n**2. - 1.)
beta = L - H

def eq(x):
    res = x**2. + x * alpha * beta + beta**2. * alpha  / 2.
    return res

esti = [1.]
y = scpo.fsolve(eq, esti)
print (y)
```