M3-Cours

Véhicules à roues

Ce chapitre propose une discussion pragmatique sur la physique des véhicules à roues. On décrira le fonctionnement des véhicules tractés (calèches, ou remorques,...) et des véhicules motorisés (voitures). Un point essentiel de ce chapitre est de retenir que dans le cas des véhicules motorisés, ce sont les frottements sur le sol qui lui permettent d'avancer : les frottements ne sont donc pas toujours néfastes !

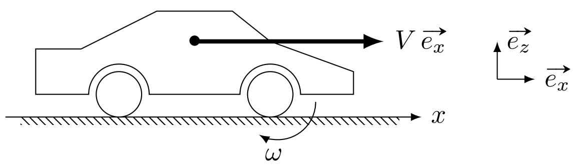
Table des matières

1 Description du système

1.1 Modélisation du véhicule

► Dans le cadre du programme, on se limite à considérer une voiture avançant à une vitesse constante $V\,\overrightarrow{e_x}$ sur une route horizontale. Le référentiel lié à la voiture est donc **galiléen** : on peut y appliquer les théorèmes de la mécanique sans invoquer les pseudo-forces d'inertie.

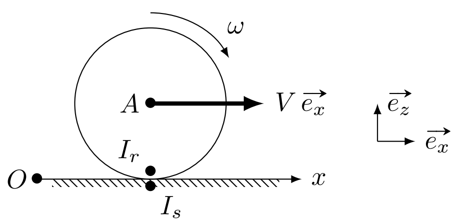
► On décompose le véhicule en {roues+reste}. Les quatre roues sont identiques, de rayon a, de moment d'inertie J, et on note $\omega > 0$ leur vitesse angulaire. Le contact entre chacune des roues et le sol est supposé ponctuel et le coefficient de frottement entre les roues et le sol est noté f. La masse totale du véhicule est M.



► Attention, il ne faut pas oublier, malgré le schéma qui ne les représente pas, qu'il y a **deux roues avant et deux roues arrière**.

1.2 Condition de non glissement des roues

Dans ce chapitre, le cas où les roues rouleraient tout en glissant (pendant un dérapage par exemple) n'est pas étudié. Nous envisageons donc seulement les deux cas suivants : soit les roues glissent sans rouler (l'équation est simplement $\omega = 0$ puisqu'elles ne roulent pas), soit les roues roulent sans glisser. On détaille le second ci-dessous. Pour cela, on se concentre sur une roue.



Définition. Vitesse de glissement. On définit les deux points **confondus** à l'instant t (mais légèrement décalés sur le schéma pour la compréhension) I_r et I_s, correspondant tous les deux géométriquement au point de contact I entre la roue et le sol, mais respectivement attachés à la roue (pour I_r) et au sol (pour I_s). On définit alors la vitesse de glissement par

$$\vec{v_g} = \vec{v}(I_r) - \vec{v}(I_s)$$

Condition de roulement sans glissement. La condition de non-glissement est simplement $\vec{v_g} = \vec{0}$, soit

$$\boxed{\vec{v}(I_r) = \vec{v}(I_s)} \tag{1}$$

Remarquez que cette relation traduit que ces deux points évoluent identiquement au moment du contact entre la roue et le sol. Le fait que deux points évoluent de la même façon ne dépend évidemment pas du référentiel (si ils ont la même vitesse dans un référentiel, ils ont la même vitesse dans tous les référentiels). Par conséquent, la condition de non-glissement (1) est **valable dans tous les référentiels**.

▶ Le plus simple est de l'expliciter en raisonnant dans le référentiel lié au sol. Dans ce référentiel, le point I_s est fixe (puisque lié au sol fixe !) donc $\vec{v}(I_s) = \vec{0}$. Quant au point I_r, on peut écrire

$$\vec{v}(I_r) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OI_r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AI_r}}{\mathrm{d}t}$$

où la deuxième égalité utilise la relation de Chasles. Le point A se déplace à $V\,\vec{e_x}$, et le point I_r a, par rapport au point A, un mouvement circulaire uniforme de rayon a et de vitesse angulaire ω. On a donc

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AI_r}}{\mathrm{d}t} = -a\,\omega\,\vec{e_x}$$

d'où

$$\vec{v}(I_r) = \big(V - a\,\omega\big)\,\vec{e_x} \qquad \text{dans le référentiel lié au sol.}$$

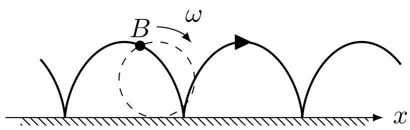
Condition de non glissement.

La nullité de la vitesse de glissement $\vec{v_g} = \vec{0}$ impose, puisque $\vec{v}(I_s) = \vec{0}$ dans le référentiel lié au sol,

$$\vec{v}(I_r) = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{V = a\,\omega}$$

Conclusion. A priori, V et ω sont deux inconnues, mais
— si les roues glissent sans rouler, alors $\omega = 0$;
— si les roues roulent sans glisser, alors $V = a\,\omega$.

Remarque. Si on note B un point quelconque à la périphérie de la roue, on peut montrer que la trajectoire de B dans le référentiel lié au sol forme une **cycloïde** ; effectivement, au moment du contact avec le sol, ce point fait « demi-tour », et sa vitesse y est donc nulle.



AJOUTER ANIMATION

▶ On peut aussi raisonner dans le référentiel lié au centre A de la roue (en translation rectiligne uniforme à $V\,\vec{e_x}$ par rapport au référentiel lié au sol donc). Dans ce référentiel, le point I_s a une vitesse $\vec{v}(I_s) = -V\,\vec{e_x}$. Et le point I_r a un mouvement circulaire uniforme donc $\vec{v}(I_r) = -a\,\omega\,\vec{e_x}$. La condition de non-glissement (1) s'écrit donc dans ce référentiel

$$-V = -a\,\omega \qquad \text{soit} \qquad V = a\,\omega$$

et on retrouve bien sûr la même relation entre V et ω.

1.3 Méthode générale

Avant de démarrer l'étude des véhicules tractés puis des véhicules motorisés, on peut dresser la méthode générale à appliquer pour aborder ce type de problème, et évoquer une mise en garde.

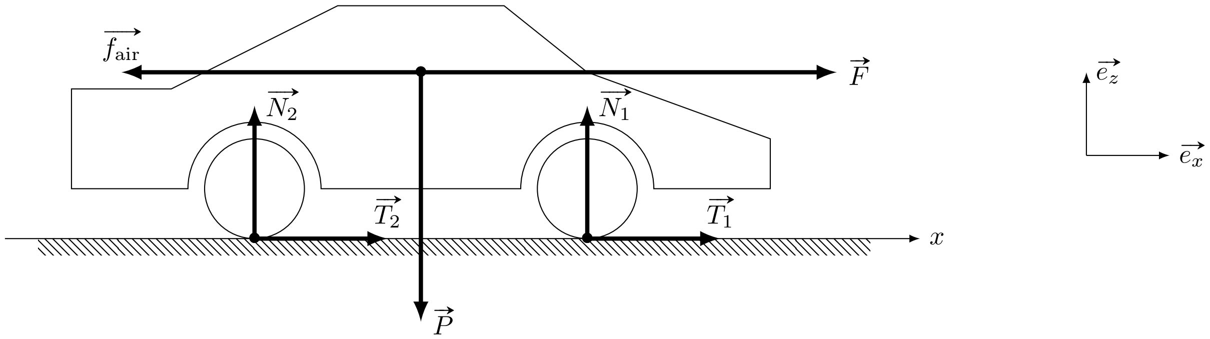
Dans l'étude de la dynamique des solides, nous avons deux théorèmes à notre disposition : le théorème du centre de masse et le théorème du moment cinétique (et éventuellement les théorèmes énergétiques, par exemple utiles pour les calculs de puissances). De manière générale,

1) il faut appliquer le théorème du centre de masse à la voiture entière, en dressant au préalable le bilan des forces **extérieures**. Les forces entre les roues et le reste de la voiture étant des forces internes, elles n'apparaissent pas dans ce théorème ;
2) si d'autres relations sont nécessaires pour conclure, il faut ensuite appliquer le théorème du moment cinétique **aux roues uniquement**.

Mise en garde. Attention, il ne faut pas chercher à appliquer le théorème du moment cinétique à la voiture toute entière. En effet, on ne sait pas écrire son moment cinétique ! Dans l'étude de la dynamique du solide, on sait seulement écrire le moment cinétique d'un solide en rotation uniforme autour d'un axe fixe justement : c'est « moment d'inertie × vitesse angulaire ». Mais la voiture n'est pas un solide ! puisque les roues tournent par rapport à la carcasse. Dans certains exercices cependant, on peut vous indiquer comment s'écrit ce moment cinétique, mais c'est hors-programme donc pas exigible sans aide de l'énoncé.

2 Cas d'un véhicule tracté

On envisage dans cette partie le cas d'un véhicule tracté par une force constante $\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{e_x}$. On dresse le bilan des forces sur un schéma.



Bilan des forces. Les forces extérieures s'exerçant sur la voiture sont :
- le poids $\overrightarrow{P} = -M\,g\,\overrightarrow{e_z}$;
- la force de traction $\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{e_x}$, exercée par une voiture motorisée, ou un cheval... ;
- la force de frottement de l'air $\overrightarrow{f_{\text{air}}} = -\alpha\,V^2\,\overrightarrow{e_x}$, qu'on propose en V^2 car l'écoulement est à haut Reynolds ;
- les actions de contact avec le sol sur une roue avant $\overrightarrow{R_1} = T_1\,\overrightarrow{e_x} + N_1\,\overrightarrow{e_z}$, qu'on décompose en réaction tangentielle T_1 et réaction normale N_1 ;
- et idem sur une roue arrière $\overrightarrow{R_2} = T_2\,\overrightarrow{e_x} + N_2\,\overrightarrow{e_z}$.

Noter qu'on ne présage nulle part du signe de T_1 et T_2. Ces grandeurs peuvent être positives ou négatives.

2.1 Cas des roues bloquées

On considère pour commencer le cas où les roues sont bloquées, par le frein à main par exemple. *(Alors on peut écrire directement que $\omega = 0$, mais nous n'avons pas besoin de cette relation.)*

Cas des roues qui glissent sans rouler.

Le théorème du centre de masse appliqué sur la voiture à vitesse V constante dans le référentiel lié au sol, puis projeté sur $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ conduit à

$$0 = F - \alpha\,V^2 + 2\,T_1 + 2\,T_2 \qquad \text{soit} \qquad F - \alpha\,V^2 = -2\,(T_1 + T_2)$$
$$0 = -M\,g + 2\,N_1 + 2\,N_2 \qquad \text{soit} \qquad 2\,(N_1 + N_2) = M\,g$$

Remarquez les facteurs 2 sur les réactions car ils y a deuux roues avant et deux roues arrière. Par ailleurs, puisque les roues glissent, les lois de Coulomb pour le frottement solide dans le cas du glissement donnent $T_1 = -f\,N_1$ et $T_2 = -f\,N_2$ d'où

$$\boxed{F = \alpha\,V^2 + f\,M\,g}$$

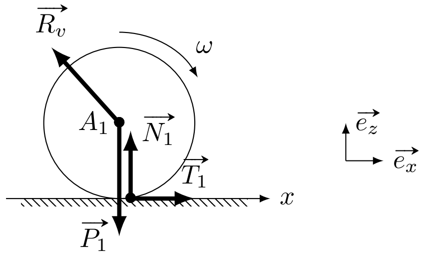
Cette équation s'interprète par le fait que pour maintenir la vitesse de la voiture constante, la force de traction doit compenser les frottements du sol et de l'air.

2.2 Cas de roulement sans glissement

On envisage maintenant le cas où le véhicule est toujours tractée par une force constante, mais cette fois les roues ne sont pas bloquées. Elles roulent alors sans glisser, à la vitesse angulaire $\omega = V\,/\,a$ d'après la condition de roulement sans glissement.

Le théorème du centre de masse est identique au cas des roues bloquées, puisqu'il n'y a pas de force supplémentaires en jeu. Nous ne pouvons par contre plus écrire les lois de Coulomb pour le glissement. Par contre, nous pouvons appliquer le théorème du moment cinétique sur les roues avant et arrière.

► On considère pour commencer une roue avant, et on se place dans le référentiel lié au centre de masse de la voiture.



Sur le schéma, on a décalé les réactions du sol pour plus de lisibilité, mais elles s'exercent rigoureusement au point de contact avec le sol, c'est-à-dire à la verticale du centre A_1 de la roue. $\overrightarrow{P_1}$ est le poids de la roue, et $\overrightarrow{R_v}$ est la réaction entre la roue et la voiture (via l'essieu). Le moment cinétique de la roue est

$$\overrightarrow{L_1} = J\,\omega\,\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{\text{Cste}}$$

avec $\overrightarrow{e_y}$ le vecteur unitaire qui rentre dans la feuille (utilisez la règle du pouce de la main droite pour le visualiser). Ensuite, le moment par rapport au point A_1 deu poids est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{A_1A_1} \wedge \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$$

car le poids s'exerce au centre de masse A_1. Le moment de la réaction de la voiture $\overrightarrow{R_v}$ est également nulle pour la même raison. Le moment de la réaction normale est quant à lui (on note I le point de contact entre la roue et le sol

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\overrightarrow{N_1}) = \overrightarrow{A_1I} \wedge \overrightarrow{N_1} = -a\,\overrightarrow{e_z} \wedge N_1\,\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$$

car $\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$. Enfin, le moment de la réaction tangentielle est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\overrightarrow{T_1}) = \overrightarrow{A_1I} \wedge \overrightarrow{T_1} = -a\,\overrightarrow{e_z} \wedge T_1\,\overrightarrow{e_x} = -a\,T_1\,\overrightarrow{e_y}$$

Finalement, le théorème du moment d'inertie appliqué à la roue par rapport au point A_1 donne

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_1}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0} = -a\,T_1\,\overrightarrow{e_y}$$

où la première égalité utilise que lorsque le véhicule avance à vitesse constante, la vitesse angulaire ω est constante également. En conclusion,

$$T_1 = 0$$

► Sur une roue arrière, le raisonnement est en tout point identique et on conclut de même

$$T_2 = 0$$

Cas des roues qui roulent sans glisser.

Le théorème du centre de masse appliqué à la voiture dans le référentiel lié au sol dans le cas des roues qui roulent sans glisser conduit à :

$$\boxed{F = \alpha\,V^2}$$

car nous avons montré par le théorème du moment cinétique appliqué aux roues que dans ce cas $T_1 = T_2 = 0$. Cette équation s'interprète par le fait que pour maintenir la vitesse de la voiture constante, la force de traction doit compenser les frottements de l'air uniquement ! C'est le rôle des roues : elles permettent de s'affranchir des frottements solides sur le sol ! Une des très grandes inventions de l'humanité.

3 Cas d'un véhicule motorisé

Bilan des forces : poids $\overrightarrow{P}$, frottement de l'air $\overrightarrow{f_{\text{air}}} = -\alpha\,V^2$, actions de contact au sol sur les roues avant $\overrightarrow{R_1} = T_1\,\overrightarrow{e_x} + N_1\,\overrightarrow{e_z}$ et sur les roues arrière $\overrightarrow{R_2} = T_2\,\overrightarrow{e_x} + N_2\,\overrightarrow{e_z}$.
Couple moteur : il y a désormais un couple $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma\,\overrightarrow{e_y}$ exercé par le moteur sur chacune des roues avant.

3.1 Théorème du centre de masse et théorème du moment cinétique

Roue qui roulent. Théorème du centre de masse identique et théorème du moment cinétique sur les roues avant et arrière ($\dot{\omega} = 0$) :

$$0 = -a\,T_1 + \Gamma$$
$$0 = a\,T_2$$

On déduit

$$T_1 = \frac{\Gamma}{a} \qquad \text{soit} \qquad \alpha\,V^2 = \frac{2\,\Gamma}{a}$$

C'est grâce aux frottemens T_1 que la voiture avance ! **Les frottements ne sont pas toujours néfastes.**

3.2 Bilan énergétique

Le théorème de la puissance cinétique à la voiture s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

La puissance des frottents de l'air vaut $\overrightarrow{f_{\text{air}}} \cdot V\,\overrightarrow{e_x} = -\alpha\,V^3$. Dans le cas de non glissement, la vitesse du point de contact par rapport à la route est nulle donc les actions de contact du sol ne travaillent pas. La puissance intérieure résulte uniquement de la liaison entre les roues et le reste de la voiture. Le reste de la voiture étant solide, toutes les autres forces intérieures ne travaillent pas. Finalement,

Bilan énergétique. La puissance fournie par le moteur compense les pertes dues aux frottements de l'air

$$2\,\Gamma\,\omega = \alpha\,V^3$$

Énergétiquement, c'est évidemment le moteur (Γ) qui fait avancer la voiture, d'où la nécessité de faire le plein d'essence.