H3-TD

Correction

H3 — 11 Écoulement au-dessus d'un obstacle

1) Évidemment au niveau de l'obstacle l'écoulement n'est pas uniquement suivant $\vec{e_x}$: l'eau doit passer par dessus donc le champ de vitesse a forcément aussi une composante suivant $\vec{e_z}$. Par le champ de vitesse de l'énoncé, on cherche en fait à décrire le **champ de vitesse « moyen »**.

2) Le fluide est **parfait** et **homogène**, l'écoulement est **stationnaire** (c'est suggéré par le fait que le champ de vitesse proposé ne dépend que de x et non de t) et **incompressible** (car le fluide l'est). On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli **sur une ligne de courant le long de la surface libre**. On a alors

$$\frac{v^2(x)}{2} + \frac{P_0}{\varrho} + g\left(e(x) + h(x)\right) = \text{Cste}$$

car $P = P_0$ par contact avec l'atmosphère le long de cette ligne de courant. En dérivant cette équation par rapport à x, on obtient

$$\boxed{v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + g\left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) = 0} \tag{1}$$

3) L'écoulement est incompressible donc **le débit volumique est conservé le long d'un tube de courant**. En considérant le tube de courant formé par le canal entier de section $S(x) = L\,h(x)$, on peut écrire

$$L\,h(x)\,v(x) = \text{Cste} \qquad \text{soit en dérivant} \qquad \boxed{v\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + h\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0} \tag{2}$$

4) On détermine déjà par (2)

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -\frac{h}{v}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

puis en introduisant cette expression dans (1) et en multipliant par v on trouve

$$v^2\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + g\,v\,\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}x} - g\,h\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$$

soit directement

$$\boxed{\frac{1}{v}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(v^2 - g\,h) + g\,\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}x} = 0} \tag{3}$$

5) En utilisant de nouveau l'équation (2) dans l'équation (1), on peut écrire

$$-\frac{v^2}{h}\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + g\left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\left(g\,h - v^2\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + g\,h\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}x} = 0} \tag{4}$$

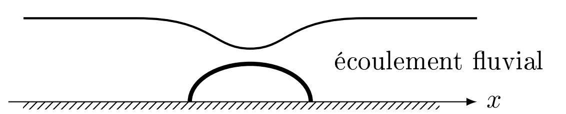
Au niveau du maximum de la bosse, en $x = x_m$, on a

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}x^2} > 0$$

D'après l'équation (4), et pour un nombre de Froude $\mathcal{F} < 1$, c'est-à-dire $v^2 < g\,h$, on déduit qu'en $x = x_m$ on a

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2} < 0$$

La hauteur d'eau h passe donc par un minimum à cet endroit. On schématise ci-contre



6) Même raisonnement, cette fois si $\mathcal{F} > 1$ alors au niveau du maximum de e, on a d'après l'équation (4)

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2} > 0$$

La hauteur d'eau h passe donc par un maximum à cet endroit.