H3-TD

Correction

H3 — 10 Implosion d'une bulle

1) La bulle étant sphérique, elle est symétrique par toutes les rotations d'angle θ et φ. L'écoulement ne peut donc pas dépendre de ces variables (on observe « exactement la même bulle » après avoir tourné autour, donc on doit observer aussi le même écoulement, c'est un argument d'**invariance**). Le champ de vitesse s'écrit ainsi

$$\vec{v}(r,\theta,\varphi,t) = \vec{v}(r,t)$$

Par ailleurs, la bulle a un mouvement purement radial (elle implose, son rayon $a(t)$ diminue mais elle conserve une forme sphérique tout le long de l'implosion). Le fluide autour de la bulle va suivre le mouvement de celle-ci, donc être radial également (c'est un argument de **symétrie**, le fluide n'a aucune raison de se mettre à tourner autour de la bulle lors de l'implosion... D'ailleurs, s'il se met à tourner, il n'a pas plus de raisons d'aller vers la droite que vers la gauche : par symétrie, il ne va donc ni vers l'une ni vers l'autre). Le champ de vitesse s'écrit donc

$$\boxed{\vec{v}(r,t) = v(r,t)\,\vec{e_r}}$$

2) La composante normale de la vitesse est continue sur une interface pour un fluide parfait *(et uniquement la composante normale : si le fluide est parfait il peut glisser sur une interface contrairement à un fluide visqueux : sa composante tangentielle n'a pas de raison d'être continue)*. Ici, la composante normale est la composante radiale. On a donc

$$\boxed{v\big(r=a(t),t\big) = \dot{a}(t)}$$

où $\dot{a}(t)$ est la vitesse de l'interface entre bulle et le fluide.

3) Le débit volumique D_V à travers la sphère de rayon r ne peut pas dépendre de r. En effet, si on considère le volume entre les sphères de rayons r et r' quelconques, le volume de fluide entrant (en r) dans ce volume doit être égal au volume de fluide sortant (en r'), car sinon on aurait une accumulation de fluide entre les deux sphères ce qui est impossible car l'écoulement est incompressible. On a donc

$$D_V = \oiint_{S(r)} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = f(t)$$

(le débit ne peut pas dépendre de r d'après l'argument sus-mentionné, mais il peut dépendre de t a priori), d'où

$$v(r,t) = \frac{f(t)}{4\,\pi\,r^2}$$

Par ailleurs, puisqu'on sait que $v\big(r=a(t),t\big) = \dot{a}(t)$, on peut écrire

$$\dot{a}(t) = \frac{f(t)}{4\,\pi\,a^2(t)} \qquad \text{soit} \qquad f(t) = 4\,\pi\,a^2(t)\,\dot{a}(t)$$

et finalement

$$\boxed{v(r,t) = \frac{a^2(t)\,\dot{a}(t)}{r^2} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(r,t) = \frac{a^2(t)\,\dot{a}(t)}{r^2}\,\vec{e_r}}$$

4) Avec le formulaire donné, on calcule effectivement $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ donc l'écoulement est **irrotationnel**. Il dérive donc d'un potentiel des vitesses. Vérifions que le potentiel donné convient, en utilisant le formulaire donné pour le gradient. On calcule

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(-\frac{a^2(t)\,\dot{a}(t)}{r}\right) = \frac{a^2(t)\,\dot{a}(t)}{r^2}\,\vec{e_r} = \vec{v}$$

Le potentiel est bien tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$: **il convient**.

5) Appliquon le théorème de Bernoulli démontré dans l'exercice H3-09. Il s'écrit (on néglige la pesanteur $g=0$)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\varrho} = F(t)$$

avec F une fonction du temps uniquement. On peut déterminer cette fonction en l'évaluant en $r \to \infty$. À l'infini, $\varphi = 0$, $v = 0$ et $P = P_0$, d'où

$$F(t) = \frac{P_0}{\varrho} \qquad \text{(donc en fait indépendante du temps !)}$$

Le théorème de Bernoulli s'écrit ainsi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\varrho} = \frac{P_0}{\varrho}$$

Utilisons les expressions de φ et v pour l'expliciter

$$-2\,\frac{a\,\dot{a}^2}{r} - \frac{a^2\,\ddot{a}}{r} + \frac{a^4\,\dot{a}^2}{2\,r^4} + \frac{P}{\varrho} = \frac{P_0}{\varrho}$$

Ensuite, on peut à nouveau évaluer cette quantité, cette fois en $r = a(t)$. À ce rayon, la pression est nulle $P = 0$ (la bulle est une bulle de vide donc $P_{\text{int}} = 0$ et il y a continuité de la pression à l'interface puisqu'on néglige les effets de la tension superficielle). On a alors

$$-2\,\dot{a}^2 - a\,\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2} = \frac{P_0}{\varrho} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{a\,\ddot{a} + \frac{3}{2}\,\dot{a}^2 = -\frac{P_0}{\varrho}}$$

C'est une équation différentielle ordinaire du second ordre et non linéaire... Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre ce genre d'équation. Heureusement l'énoncé nous aide en nous donnant une intégrale première.

6) En dérivant l'équation donnée par l'énoncé, on tombe bien sur l'équation précédente : l'intégration est correcte. Ensuite, on détermine C à l'aide d'une **condition initiale** (et non pas une condition aux limites car on a intégré sur la variable temporelle !). On a $a(0) = a_0$ et $\dot{a}(0) = 0$ d'après l'énoncé. Alors

$$\boxed{C = \frac{2}{3}\,\frac{P_0}{\varrho}\,a_0^3}$$

7) L'énoncé a intégré une première fois, à nous d'intégrer une deuxième fois. On commence par isoler $\dot{a}$, en utilisant aussi l'expression de C déterminé précédemment :

$$\dot{a} = -\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{P_0}{\varrho}\left(\frac{a_0^3}{a^3} - 1\right)}$$

(on a choisi « − la racine » car on sait que la bulle implose donc son rayon diminue donc $\dot{a} < 0$.) C'est une équation différentielle du premier ordre non linéaire, et cette fois on peut espérer la résoudre par séparation des variables. Pour trouver la fonction solution $a(t)$, « on met tout ce qui est en a d'un côté et tout ce qui est en t de l'autre » :

$$\frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{\left(\dfrac{a_0^3}{a^3} - 1\right)}} = -\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{P_0}{\varrho}}\,\mathrm{d}t$$

et on intègre entre $t = 0$ où $a = a_0$ et le temps de vie $t = t_f$ où $a = 0$ (la bulle a implosé).

$$\int_{a_0}^{0} \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{\left(\dfrac{a_0^3}{a^3} - 1\right)}} = -\int_0^{t_f} \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{P_0}{\varrho}}\,\mathrm{d}t$$

On pose à gauche le changement de variable $u = a/a_0$, alors

$$a_0 \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{u^3} - 1\right)}}}_{=I} = \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{P_0}{\varrho}}\,t_f$$

Mais l'intégrale est juste un nombre qu'on note I. On peut l'évaluer avec Python : $I \approx 0{,}746834$. On conclut finalement cette superbe étude par l'expression du temps de vie t_f de la bulle :

$$\boxed{t_f = \sqrt{\frac{3\,\varrho}{2\,P_0}}\,I\,a_0}$$

On a $t_f \propto a_0$: plus la bulle est initialement grosse, plus elle met de temps à imploser, et ceci de manière proportionnelle à son rayon initial. Aussi, on constate que quand la pression loin de la bulle est plus forte, le temps de vie est plus court conformément à l'intuition.