H3-TD

Correction

H3 — 09 Relation de Bernoulli dans le cas irrotationnel instationnaire

1) Pour pouvoir appliquer le théorème de Bernoulli (général, c'est-à-dire non restreint à une ligne de courant), il faut que **le fluide soit parfait et homogène, et que l'écoulement soit incompressible, stationnaire et irrotationnel**.

2) La démonstration du théorème part de l'équation d'Euler

$$\varrho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} \right) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P + \varrho\, \vec{g}$$

Si l'écoulement n'est pas stationnaire, le terme d'accélération locale

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \qquad \text{n'est plus simplifiable.}}$$

3) L'écoulement est **irrotationnel** donc le champ de vitesse dérive d'un potentiel des vitesses φ, c'est-à-dire que

$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \varphi}$$

4) La démonstration consiste à écrire chacun des termes de l'équation d'Euler sous la forme d'un gradient. Déjà, l'écoulement étant irrotationnel, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \vec{0}$$

donc le terme d'accélération convective s'écrit, en utilisant la décomposition de Lamb,

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} \right) \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Ensuite, si l'axe z est vertical ascendant, alors

$$\varrho\, \vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, (\varrho\, g\, z)$$

Enfin, puisque $\vec{v}$ dérive d'un potentiel, on a

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \varphi = \overrightarrow{\mathrm{grad}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

(dans la dernière égalité, on a utilisé le fait qu'on peut intervertir les dérivées spatiales et temporelles). Finalement, l'équation d'Euler s'écrit (ϱ est une constante car le fluide est homogène et l'écoulement est incompressible donc on peut le rentrer/sortir des gradients)

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\varrho} + g\, z \right) = \vec{0}$$

Si le gradient d'une quantité est identiquement nul, c'est que la quantité et homogène (on dit aussi uniforme) c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la position dans l'espace. Elle peut par contre évidemment dépendre du temps. On a donc finalement

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\varrho} + g\, z = f(t)}$$

où f est une fonction du temps uniquement. C'est **le théorème de Bernoulli pour un fluide parfait et homogène, en écoulement incompressible et irrotationnel**.