H3-TD

Correction

H3 — 08 Naufrage d'un bateau

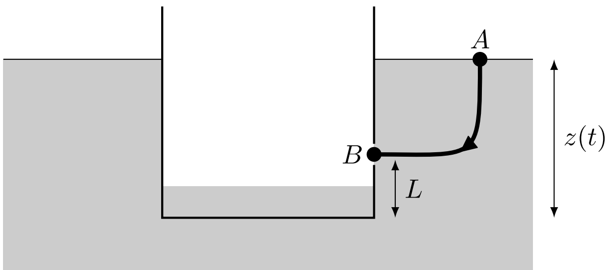
1) Si la vitesse d'enfoncement est faible, on peut supposer le bateau **en équilibre** à tout instant. Par conséquent, les forces extérieures qui s'exercent sur lui se compensent. Puisqu'il est uniquement soumis à son poids $\vec{P}$ et à la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$, on peut écrire

$$\vec{P} + \vec{\pi} = \vec{0}$$

Par ailleurs, la masse du bateau est celle de la coque M plus celle de l'eau déjà infiltrée $\mu\, S\, h(t)$ (c'est « masse volumique × volume »), tandis que la masse du fluide déplacé est $\mu\, S\, z(t)$. En projetant sur l'axe z vertical ascendant, on a

$$-\left(M + \mu\, S\, h(t)\right) g + \mu\, S\, z(t)\, g = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{M + \mu\, S\, h(t) = \mu\, S\, z(t)} \tag{1}$$

2) Le fluide est parfait et homogène, et l'écoulement est stationnaire (on le suppose en disant que le bateau s'enfonce suffisamment lentement) et incompressible donc on peut appliquer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant.



Le long de la ligne de courant de A à B, il s'écrit

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\varrho} + g\, z_A = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\varrho} + g\, z_B$$

Ensuite, on peut préciser $v_A = 0$ (la surface libre de l'océan ne bouge pas), $v_B = V(t)$ (la vitesse qu'on recherche), puis $z_A - z_B = z(t) - L$ et enfin $P_A = P_B = P_0$ (contact avec l'atmosphère dans les deux cas). Finalement,

$$\boxed{V(t) = \sqrt{2\, g\, (z(t) - L)}} \tag{2}$$

3) Connaissant la vitesse $V(t)$ au niveau de la fuite de section s, le débit volumique s'écrit

$$D_V = V(t)\, s \tag{3}$$

Par ailleurs, le volume d'eau dans le bateau $\mathcal{V}(t) = S\, h(t)$ augmente du fait de ce débit entrant. On peut donc également écrire que le volume $\mathrm{d}\mathcal{V}$ d'eau qui est entré entre t et $t + \mathrm{d}t$ dans le bateau est

$$\mathrm{d}\mathcal{V} = D_V\, \mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad D_V = S\, \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

En utilisant les équations (1) à (4), on calcule successivement

$$S\, \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = V(t)\, s = s\, \sqrt{2\, g\, (z(t) - L)} = s\, \sqrt{2\, g\, \left(h(t) + \frac{M}{\mu\, S} - L\right)}$$

soit finalement

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{s}{S}\, \sqrt{2\, g\, \left(h(t) + \frac{M}{\mu\, S} - L\right)}}$$

4) Il faut résoudre cette équation différentielle ordinaire non linéaire du premier ordre. On le fait par séparation des variables. Pour trouver la fonction solution $h(t)$, on met « tout ce qui est en h d'un côté et tout ce qui est en t de l'autre », soit ici

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h(t)+\dfrac{M}{\mu\,S}-L}}=\frac{s}{S}\sqrt{2\,g}\,\mathrm{d}t$$

En intégrant de $t=0$ où $h=0$ à t où la hauteur d'eau est $h(t)$, on obtient

$$\int_0^{h(t)}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h(t)+\dfrac{M}{\mu\,S}-L}}=\int_0^t\frac{s}{S}\sqrt{2\,g}\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad 2\left(\sqrt{h(t)+\frac{M}{\mu\,S}-L}-\sqrt{\frac{M}{\mu\,S}-L}\right)=\frac{s}{S}\sqrt{2\,g}\,t$$

On déduit le temps t_f lorsque la hauteur d'eau $h(t_f)$ vaut L comme étant

$$\boxed{t_f=\frac{\sqrt{2\,M\,S}}{s\,\sqrt{\mu\,g}}\left(1-\sqrt{1-\frac{\mu\,S\,L}{M}}\right)}$$