H3-TD

Correction

H3 — 03 Forme d'un filet d'eau

1) Évaluons le nombre de Reynolds de l'écoulement.

$$\mathcal{R}_e = \frac{\varrho\, L\, V}{\eta}$$

Pour taille typique on prend le rayon du robinet r_0, et pour vitesse typique on détermine le débit volumique $D_V = V \pi\, r_0^2$ soit $V = D_V \,/\, (\pi\, r_0^2)$. On calcule alors

$$\mathcal{R}_e = \frac{\varrho\, D_V}{\eta\, \pi\, r_0} \approx 640$$

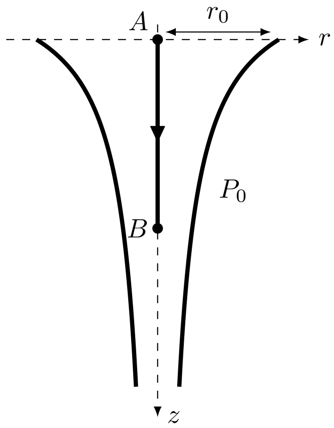
(Pensez à mettre le débit en $\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$*.)* Le Reynolds étant inférieur à 2000, l'écoulement est a priori **laminaire**. L'écoulement deviendrait turbulent si le Reynolds dépassait $\mathcal{R}_e^{\text{turb}} = 2000$, c'est-à-dire pour un débit

$$\boxed{D_V = \frac{\eta\, \pi\, r_0\, \mathcal{R}_e^{\text{turb}}}{\varrho} = 6{,}3 \times 10^{-2}\ \ \mathrm{L \cdot s^{-1}}}$$

2) L'écoulement est parfait et on peut le considérer essentiellement unidirectionnel (vertical descendant). La pression **évolue donc comme en statique dans les directions horizontales**, c'est-à-dire qu'elle ne varie pas selon ces directions. L'écoulement étant entouré d'une surface libre avec l'air à P_0, la **continuité de la pression** à l'interface implique que $P = P_0$ partout dans le fluide.

3) Déjà, la conservation du débit volumique (car le fluide est incompressible donc l'écoulement l'est aussi et le filet d'eau est un tube de courant) impose que

$$v(z) = \frac{D_V}{\pi\, r^2(z)}$$



Ensuite, on considère le fluide parfait et homogène, et l'écoulement est stationnaire et incompressible donc on peut appliquer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant. On considère celle qui va de A à B. Il s'écrit (on met l'axe z vers le bas, attention au signe de vant le terme de pesanteur)

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\varrho} - g\, z_A = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\varrho} - g\, z_B$$

Or $P_A = P_B = P_0$, $z_A = 0$ (on choisit A comme origine du repère), $z_B = z$, et par conservation du débit

$$v_A = \frac{D_V}{\pi\, r_0^2} \qquad \text{et} \qquad v_B = \frac{D_V}{\pi\, r^2(z)}$$

En conséquence,

$$\frac{D_V^2}{2\, \pi^2\, r_0^4} = g\, z + \frac{D_V^2}{2\, \pi^2\, r^4(z)} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z = \frac{D_V^2}{2\, \pi^2\, g} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right)}$$

On a donc $z \propto r^{-4}$.