H2-TD

Correction

H2 — 07 Écoulement entre deux plans verticaux

1) L'énoncé indique que la masse volumique μ du fluide est constante. On a donc $\mathrm{D}\mu \,/\, \mathrm{D}t = 0$ et donc l'écoulement est **incompressible**. Par conséquent,

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\partial v}{\partial z} = 0}$$

(car $v_x = 0 = v_y$ et $v_z = v$) et on apprend ainsi que le champ de vitesse **ne dépend en fait pas de** z.

2) On regarde les différents termes de l'équation de Navier-Stokes. Puisque l'écoulement est stationnaire, on a déjà

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

puis

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\right) \vec{v} = \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, v\right) \vec{e_z} = \vec{0} \qquad \text{car } v_x = 0 = v_y \text{ et } \partial v_z \,/\, \partial z = 0.$$

et enfin

$$\Delta \vec{v} = (\Delta v)\, \vec{e_z} = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}\, \vec{e_z}$$

(on utilise une dérivée droite car v ne dépend que de x). La projection de l'équation de Navier-Stokes sur les axes x et y conduisent alors à

$$\boxed{0 = -\frac{\partial P}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y}}$$

Le champ de pression ne dépend donc pas de x et y, et **ne dépend donc que de** z.

3) La dernière projection sur la direction z donne

$$0 = \eta\, \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \mu\, g \qquad \text{soit} \qquad \eta\, \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}(x) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(z) - \mu\, g$$

(L'axe z est vers le bas donc la projection du poids volumique est bien $+\mu\, g$.) On se rend compte qu'on a une égalité entre deux fonctions qui ne dépendent pas de la même variable (x à gauche, z à droite). On en conclut que ces deux fonctions sont alors forcément **égales à une même constante** C. On a donc d'une part

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} - \mu\, g = C \qquad \text{soit} \qquad P(z) = (C + \mu\, g)\, z + \text{Cste}$$

après intégration. Or l'énoncé précise que $P(0) = P(\ell) = P_0$ donc $C = -\mu\, g$ et $\text{Cste} = P_0$, soit finalement

$$\boxed{P(z) = P_0}$$

La pression est constante dans tout l'écoulement. D'autre part, on a aussi

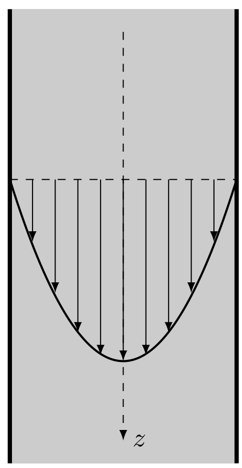
$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{C}{\eta} = -\frac{\mu\, g}{\eta}$$

Une double intégration conduit à

$$v(x) = -\frac{\mu\, g}{2\, \eta}\, x^2 + A\, x + B$$

avec A et B des constantes d'intégration. Les deux conditions aux limites $v(-h/2) = v(h/2) = 0$ permettent d'obtenir $A = 0$ et $B = \mu\, g\, h^2 \,/\, (8\, \eta)$ d'où

$$\boxed{v(x) = \frac{\mu\, g}{2\, \eta} \left(\frac{h^2}{4} - x^2\right)}$$



Remarque. Contrairement à l'écoulement de Poiseuille du cours, l'écoulement est ici **forcé par la gravité** et non par une différence de pression. On trace le champ de vitesse ci-contre.