H1-TD

Correction

H1 — 04 Oscillations d'une bulle

1) On propose deux méthodes de résolution : l'une différentielle et l'autre intégrale. *(Évidemment les deux sont équivalentes car liées par le théorème de Green-Ostrogradski.)*

Méthode 1 - Approche différentielle. Le fluide est incompressible donc l'écoulement l'est aussi et alors

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \tag{1}$$

La géométrie sphérique du problème permet de supposer que le champ de vitesse prend la forme

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = v(r, t)\,\vec{e_r} \tag{2}$$

(il ne dépend que de r, c'est-à-dire ni de θ ni de φ ; et il est uniquement radial, c'est-à-dire selon $\vec{e_r}$: le fluide ne tourne pas autour de la bulle).

L'expression de la divergence en sphérique (qui n'est pas à connaître, elle doit être rappelée par l'énoncé) est

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\,(r^2\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial\,(\sin\theta\,A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

La forme (2) permet de voir que beaucoup de termes dans l'équation (1) sont nuls : le seul terme qui reste est le premier

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\,(r^2\,v)}{\partial r} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial\,(r^2\,v)}{\partial r} = 0$$

(Astuce. Il serait maladroit ici de développer la dérivée du produit : le calcul s'allongerait considérablement...)
En intégrant par rapport à r

$$r^2\,v(r, t) = \mathrm{Cste}(t) \tag{3}$$

La constante d'intégration est une constante vis-à-vis de la variable d'intégration r, mais elle peut dépendre de t. Il vient

$$v(r, t) = \frac{\mathrm{Cste}(t)}{r^2}$$

On détermine la constante à l'aide de la condition aux limites. Par continuité, la vitesse du fluide en $r = R$ est la même que celle de la bulle, soit $\dot{R}$, donc

$$v(R(t), t) = \dot{R}(t) = \varepsilon\,\omega\,\cos(\omega\,t)$$

or

$$v(R(t), t) = \frac{\mathrm{Cste}(t)}{R^2(t)} \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{Cste}(t) = R^2(t)\,\varepsilon\,\omega\,\cos(\omega\,t)$$

Et finalement

$$\boxed{v(r, t) = \varepsilon\,\omega\,\frac{R^2(t)}{r^2}\,\cos(\omega\,t)}$$

Méthode 2 - Approche intégrale. Le fluide est incompressible donc le volume de fluide qui traverse la sphère de rayon r entre t et $t + dt$ est identique à celui qui traverse celle de rayon r' pendant la même durée, quelques soient r et r' (car il ne peut pas y avoir d'augmentation du volume de fluide entre r et r', « tout ce qui rentre doit sortir »...) Le débit volumique à travers la sphère $\mathcal{S}$ de rayon r est ainsi indépendant de r (mais il peut dépendre du temps)

$$\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{Cste'}(t)$$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ étant orthogonal à la surface qui l'engendre, on a ici $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\vec{e_r}$. Le produit $\vec{e_r}\cdot\vec{e_r} = 1$, et comme v ne dépend que de r, elle est constante sur la sphère de rayon r donc peut sortir de l'intégrale. Alors

$$v(r, t)\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S = \mathrm{Cste'}(t) \qquad \text{soit} \qquad 4\,\pi\,r^2\,v(r, t) = \mathrm{Cste'}(t)$$

car la surface de la sphère est $4\,\pi\,r^2$. On aboutit à l'équation (3) avec Cste' $= 4\,\pi$ Cste et la fin du raisonnement est identique : il suffit d'utiliser la condition aux limites en $r = R(t)$.