H1-TD

Correction

H1 — 03 Écoulement potentiel

1) Par définition du potentiel,

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$$

Le formulaire donne le gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e_r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e_z}$$

On calcule alors directement avec le potentiel de l'énoncé

$$\boxed{\vec{v} = \frac{B}{r}\,\vec{e_r} - \frac{A}{r}\,\vec{e_\theta}}$$

2) L'écoulement étant incompressible, l'équation locale de conservation de la masse

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}\,(\varrho\,\vec{v}) = 0$$

se résume à

$$\text{div}\,\vec{v} = 0$$

Regardons si cette équation est bien vérifiée par le champ de vitesse déterminé à la question **1)**. Le formulaire donne la divergence en coordonnées cylindriques :

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Puisque $v_\theta = -A\,/\,r$ est indépendant de θ et que $r\,v_r = B$ est indépendant de r, la divergence est effectivement nulle et **l'équation de conservation de la masse est vérifiée.**

3) On passe maintenant en coordonnées cartésiennes. *Dans ce système de coordonnées, l'expression de tous les opérateurs est à connaitre par cœur.* On calcule

$$\boxed{\vec{v} = 2\,a\,(x\,\vec{e_x} - y\,\vec{e_y})}$$

4) Calculons $\text{div}\,\vec{v}$:

$$\text{div}\,\vec{v} = 2\,a - 2\,a = 0$$

La divergence du champ de vitesse est donc identiquement nulle et par conséquent **l'écoulement est incompressible**.

5) On calcule

$$\frac{\text{D}\vec{v}}{\text{D}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$$

car $\vec{v}$ est indépendant de t : l'écoulement est stationnaire. Ensuite,

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \left|\begin{array}{l} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,v_x \\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,v_y \\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,v_z \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} v_x\,\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\,\dfrac{\partial v_x}{\partial y} \\ v_x\,\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\,\dfrac{\partial v_y}{\partial y} \\ 0 \end{array}\right.$$

car $v_z = 0$. Sachant que $v_x = 2\,a\,x$ et que $v_y = -2\,a\,y$, on conclut

$$\boxed{\frac{\text{D}\vec{v}}{\text{D}t} = \left|\begin{array}{l} 4\,a^2\,x \\ 4\,a^2\,y \\ 0 \end{array}\right. = 4\,a^2\,(x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y})}$$