H0-Cours

Statique des fluides

Ce chapitre est un rappel de cours sur la statique des fluides, vue en première année. Il permet de rediscuter les forces de pression et les champs de pression, avant d'aborder la cinématique puis la dynamique des fluides dans les chapitres ultérieurs.

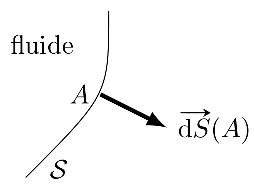
Table des matières

1 Forces de pression

1.1 Définition

Définition.
On considère une surface $\mathcal{S}$ (réelle ou fictive) en contact avec un fluide. Alors le fluide exerce sur cette surface une **force de pression** donnée par

$$\vec{F} = \iint_{A\in\mathcal{S}} P(A)\,\mathrm{d}\vec{S}(A)$$



où $\mathrm{d}\vec{S}(A)$ est un vecteur **normal** à $\mathcal{S}$ en A, et **orienté du fluide vers la surface**.

Une force de pression est toujours normale et orientée du fluide vers la surface : le fluide **pousse** la surface.

Propriété. Si la surface est fermée (donc définit un système intérieur à cette surface) alors elle sera toujours, par convention, orientée sortante. La force de pression qu'exerce le fluide extérieur sur le système à l'intérieur de la surface s'écrit dans ce cas

$$\vec{F} = -\oiint_{A\in\mathcal{S}} P(A)\,\mathrm{d}\vec{S}(A)$$

avec un « moins » car cette fois $\mathrm{d}\vec{S}(A)$ est sortant par convention (voir schéma en 1.2)

Remarque 1. Si la surface est fermée et si la pression du fluide extérieur est constante, alors on note $P(A) \equiv P_{\text{ext}}(A) =$ Cste et P_{ext} sort de l'intégrale

$$\vec{F_P} = -P_{\text{ext}} \oiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\vec{S} = \vec{0} \qquad \text{car} \qquad \oiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\vec{S} = \vec{0}$$

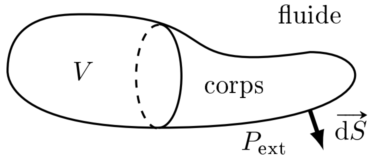
puisqu'en effet les vecteurs $\mathrm{d}\vec{S}$ s'annulent deux à deux si la surface $\mathcal{S}$ est fermée. Cela rend compte du fait que, si la pression est uniforme, alors le fluide pousse « autant à gauche qu'à droite » donc la résultante est nulle.

Remarque 2. Attention à ne pas confondre les deux intégrales

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\vec{S} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \oiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S = S$$

1.2 Poussée d'Archimède

Un corps de volume V délimité par une surface $\mathcal{S}$ (forcément fermée si elle délimite un volume), plongé dans un fluide de masse volumique ϱ_f subit de la part de celui une force de pression $\overrightarrow{F_P}$ donnée par (on répète ce qu'on a écrit juste au dessus, en n'écrivant plus A pour simplifier un peu les notations)



$$\boxed{\overrightarrow{F_P} = -\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} P_{\text{ext}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}}$$

où P_{ext} est le champ de pression dans le fluide, $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ avec $\vec{n}$ le vecteur unitaire **normal et sortant**.

Poussée d'Archimède.

On montre que cette force de pression est égale **à l'opposé du poids du fluide déplacé** (voir annexe pour la démonstration)

$$\boxed{\overrightarrow{F_P} = -\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} P_{\text{ext}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\varrho_f\,V\,\vec{g}}$$

Attention. Il faut bien comprendre que la poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression qu'un fluide exerce sur un corps immergé dans celui-ci. Par conséquent, il ne faut pas, lorsqu'on dresse le bilan des forces subies par le corps immergé, écrire la poussée d'Archimède et la résultante des forces de pression ! **Ce sont la même chose !** On écrit soit l'un, soit l'autre, mais certainement pas les deux.

1.3 Équivalent volumique mathématique

Si on considère comme système un volume infinitésimal $\mathrm{d}V$ plongé dans un fluide, alors on montre que la force de pression $\mathrm{d}\overrightarrow{F_P}$ qu'exerce le fluide sur ce système est proportionnelle à $\mathrm{d}V$ et peut donc s'écrire formellement à partir d'un équivalent volumique $\overrightarrow{f_P}$ (en $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ donc) tel que

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_P} = \overrightarrow{f_P}\,\mathrm{d}V$$

Attention. Il s'agit d'un équivalent mathématique, au sens où $\overrightarrow{F_P}$ reste fondamentalement une force de pression, donc une force qui s'exerce sur une surface (et non pas sur tout un volume comme le ferait le poids par exemple...)

Équivalent volumique des forces de pression.

On montre que l'équivalent volumique des forces de pression $\overrightarrow{f_P}$ est (voir annexe pour la démonstration)

$$\boxed{\overrightarrow{f_P} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P}$$

On a donc $\mathrm{d}\overrightarrow{F_P} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}V$. Si le champ de pression est homogène ($\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \vec{0}$), le fluide n'exerce aucune force sur le système, ce qu'on comprend car il « pousse autant à gauche qu'à droite ».

2 Champs de pression : les deux cas au programme

2.1 Équation fondamentale de la statique des fluides

On considère un fluide au repos. On choisit comme système un élément de volume infinitésimal $\mathrm{d}V$ de ce fluide, et comme référentiel le référentiel terrestre supposé galiléen. Ce système est soumis à des forces extérieures $\mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{f_{\text{ext}}}\,\mathrm{d}V$ (où $\overrightarrow{f_{\text{ext}}}$ rassemble les différentes forces volumiques) et à la résultante des forces de pression $\mathrm{d}\overrightarrow{F_P} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}V$. Puisqu'il est au repos, ces deux forces se compensent

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{ext}}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F_P} = \vec{0}$$

Équation fondamentale de la statique des fluides.

En considérant l'équivalent volumique de la force de pression pour ce système infinitésimal, on calcule

$$\overrightarrow{f_{\text{ext}}}\,\mathrm{d}V - \overrightarrow{\text{grad}}\,P\,\mathrm{d}V = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \overrightarrow{f_{\text{ext}}}}$$

C'est **l'équation fondamentale de la statique des fluides.** *(Nous verrons qu'il s'agit en fait de l'équation de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide au repos où le champ de vitesse $\vec{v}$ est nul.)* Si le fluide est soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ uniquement, alors la seule force volumique est

$$\overrightarrow{f_{\text{ext}}} = \varrho\,\vec{g} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \varrho\,\vec{g}} \tag{1}$$

où ϱ est la masse volumique du fluide.

Dans le cadre du programme, il faut savoir résoudre cette équation (1) dans deux cas particuliers : le liquide incompressible et le gaz parfait de température constante.

2.2 Dans un liquide incompressible

L'équation d'état d'un liquide incompressible est

$$\boxed{\varrho = \text{ Cste}}$$

La projection de l'équation fondamentale de la statique des fluides (1), en prenant l'axe z vers le haut, donne

$$\left|\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial P}{\partial x} & = & 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} & = & 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} & = & -\varrho\,g \end{array}\right.$$

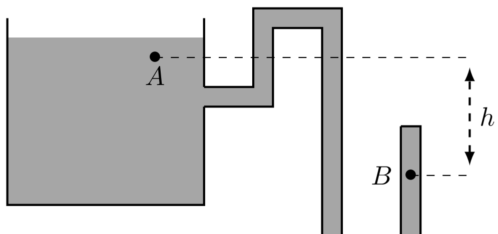
Champ de pression dans un liquide incompressible.

Les deux premières équations prouvent que le champ de pression P ne dépend pas de x ni de y, et donc ne dépend que de z (il ne dépend évidemment pas du temps puisqu'on est en statique). La dernière équation peut donc se réécrire avec une dérivée droite

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\varrho\,g \qquad \text{soit} \qquad \boxed{P(z) = -\varrho\,g\,z + \text{Cste}}$$

Remarque 1. Si l'axe z est vers le bas, on calcule $P(z) = \varrho\,g\,z + $ Cste.

Remarque 2. La pression ne dépend que de l'altitude z. Cela est remarquable puisque la « tortuosité » du dispositif n'a aucune influence.



$P_B = P_A + \varrho\,g\,h$

Remarque 3. Dans l'eau, $\varrho = 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}, on gagne 1 bar tous les 10 m. En effet, pour $|\Delta z| = 10$ m, on a

$$|\Delta P| = \varrho\,g\,|\Delta z| \approx 10^5\,\text{Pa}$$

2.3 Dans un gaz parfait de température constante

Pour un gaz parfait, l'équation d'état est cette fois $P\,V = n\,R\,T$, que l'on peut réécrire

$$\boxed{\varrho = \frac{P\,M}{R\,T}} \qquad \text{avec} \qquad M \text{ la masse molaire du gaz.}$$

La projection de l'équation fondamentale de la statique des fluides (1), en prenant l'axe z vers le haut, donne de la même façon que précédemment

$$\left|\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial P}{\partial x} & = & 0\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y} & = & 0\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial z} & = & -\varrho\, g\end{array}\right.$$

Les deux premières équations prouvent que le champ de pression P ne dépend pas de x ni de y, et donc ne dépend que de z (il ne dépend évidemment pas du temps puisqu'on est en statique). La dernière équation peut donc se réécrire avec une dérivée droite comme précédemment, mais cette fois ϱ a une expression différente

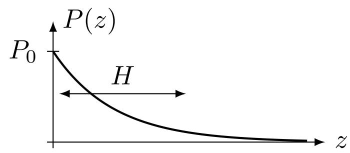
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\varrho\, g \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{M\, g}{R\, T}\, P \tag{2}$$

Champ de pression du modèle de l'atmosphère isotherme.

Dans le **modèle de l'atmosphère isotherme**, on suppose la température T constante (c'est un modèle peu réaliste : en pratique, il fait beaucoup plus froid en altitude qu'au niveau de la mer). Dans ce cas, l'équation de la statique des fluides (2) est une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre à coefficient constant, qui se résout donc par une exponentielle

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{M\, g}{R\, T}\, z\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \qquad \text{avec} \qquad H = \frac{R\, T}{M\, g} \approx 8\ \text{km}}$$

où P_0 est une constant d'intégration qui vaut $P_0 = P(z=0)$, et l'application numérique de la **hauteur typique** H a été faite pour l'air ($M = 29\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$) à $T = 298$ K. On peut tracer la figure ci-contre



Remarque 1. Résolution de l'équation par séparation des variables. Il faut savoir résoudre « à l'oeil » l'équation (2) : c'est la même équation que celle qui régit l'évolution temporelle d'un circuit RC ou RL par exemple. On discute cependant une méthode qui permet de redémontrer le résultat. Il s'agit de la séparation des variables. Lorsqu'on cherche $P(z)$, on met tout ce qui est en P d'un côté de l'équation, et tout ce qui est en z de l'autre

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{M\, g}{R\, T}\, P \qquad \text{s'écrit} \qquad \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M\, g}{R\, T}\, \mathrm{d}z$$

Puis on intègre entre $z = 0$ (où $P = P_0$) et z

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\int_0^z \frac{M\, g}{R\, T}\, \mathrm{d}z \qquad \text{soit} \qquad \ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = -\frac{M\, g}{R\, T}\, z$$

qui conduit bien sûr au résultat déjà mentionné

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{M\, g}{R\, T}\, z\right)$$

Remarque 2. Poids de Boltzmann. Le terme exponentiel que l'on rencontre ici s'appelle un poids de Boltzmann. En toute généralité, un poids de Boltzmann s'écrit

$$\exp\left(-\frac{E_p}{k_B\, T}\right)$$

et traduit une compétition entre une force (dérivant de l'énergie potentielle associée E_p) tendant à imposer un mouvement d'ensemble aux particules, et l'agitation thermique (représentée par le terme $k_B\, T$) qui tend au contraire à désordonner les particules. Ici, en utilisant que $M = m \times \mathcal{N}_A$ et $\mathcal{N}_A\, k_B = R$ on peut réécrire le terme exponentiel comme

$$\exp\left(-\frac{M\, g\, z}{R\, T}\right) = \exp\left(-\frac{m\, g\, z}{k_B\, T}\right)$$

et on comprend qu'il traduit la compétition entre le poids ($m\, g\, z$) qui tend à faire tomber toutes les particules d'air au sol, et l'agitation thermique qui les disperse dans toutes les directions.

Remarque 3. Un modèle plus réaliste pour la troposphère. Ci-dessous un schéma de l'évolution du champ de température dans l'atmosphère (adapté de la page wikipédia « Atmosphère terrestre », `https://fr.wikipedia.org/wiki/Atmosph%C3%A8re_terrestre`).

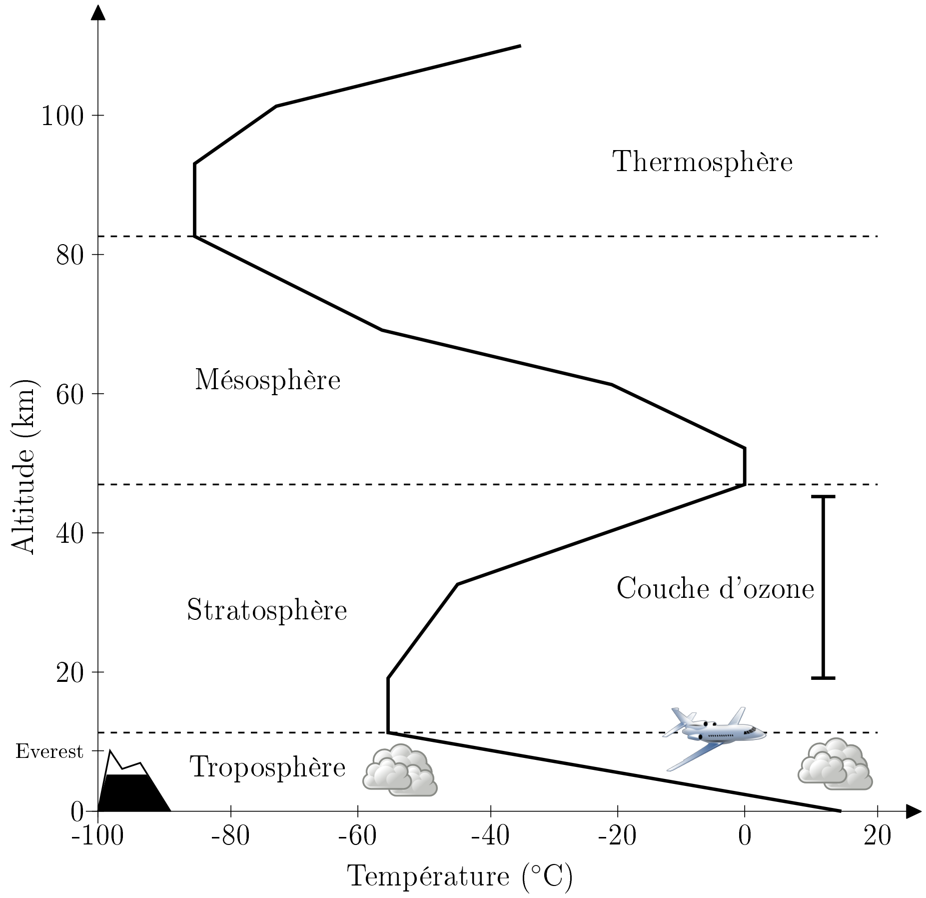
L'évolution de la température dans la troposphère (couche basse de l'atmosphère) est correctement modélisée par une évolution linéaire

$$T(z) = T_0\left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \qquad \text{avec} \qquad T_0 \approx 289\,\mathrm{K} \qquad \text{et} \qquad z_0 \approx 4{,}3 \times 10^4 \text{ m}$$

à la latitude de la France. Cette loi empirique se réécrit

$$T(z) = T_0 - \beta\, z \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{T_0}{z_0} = 6{,}7 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$$

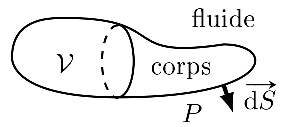
ce qui met en valeur que la chute de température est de 6,7°C tous les 1000 m. Pour plus d'informations, on pourra consulter `http://education.meteofrance.fr/lycee/animations/la-structure-verticale-de-latmosphere`. Voir aussi le TD sur les atmosphères polytropiques qui permet d'obtenir le champ de pression pour ce modèle de température linéaire.



A Annexe : Démonstrations

A.1 Démonstration de l'expression de la poussée d'Archimède

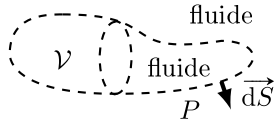
Considérons un corps de volume V et de surface $\mathcal{S}$ plongé dans un fluide de masse volumique μ_f. La force de pression qu'exerce ce fluide sur le corps est



$$\vec{F}_{f\to c} = -\oiint_{\mathcal{S}} P\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

où comme toujours $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est un vecteur normal orienté sortant.

Ayant dit cela, considérons une autre situation en tout point indentique, hormis le fait que le corps n'est plus là, et qu'il y a le fluide à la place. Considérons alors comme système l'exact même volume qu'occupait le corps lorsqu'il était présent, désormais occupé par le fluide.



Le fluide extérieur à ce système exerce sur le fluide intérieur une force

$$\overrightarrow{F}_{f\to f} = -\oiint_{\mathcal{S}} P\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

qui est ainsi exactement identique à celle qu'il exerçait sur le corps ! (car c'est la même pression : la pression dans un fluide ne change pas si on met un caillou dedans... Notamment, dans un liquide incompressible et un gaz parfait on a montré qu'elle ne dépend que de z par exemple)

$$\overrightarrow{F}_{f\to f} = \overrightarrow{F}_{f\to c}$$

Ensuite, traduisons l'équilibre du fluide qui occupe le volume précédemment occupé par le corps. Il est soumis à son poids $\overrightarrow{P}$ et à la force de pression $\overrightarrow{F}$. À l'équilibre on a donc

$$\overrightarrow{F}_{f\to f} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0} \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{F}_{f\to f} = -\overrightarrow{P} = -m_f\,\overrightarrow{g} = -\mu_f\,V\,\overrightarrow{g}$$

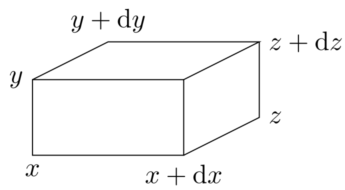
Par conséquent, on a bien

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{f\to c} = -\mu_f\,V\,\overrightarrow{g}}$$

qui est l'expression de la poussée d'Archimède : c'est l'opposé du poids du fluide déplacé.

A.2 Démonstration de l'équivalent volumique des forces de pression

Considérons un élément infinitésimal $\mathrm{d}V$ de fluide entre x et $x+\mathrm{d}x$, y et $y+\mathrm{d}y$ et z et $z+\mathrm{d}z$, représenté sur le schéma ci-contre. Cet élément est entouré du reste du fluide, ce dernier exerçant des forces de pression sur chacune de ses six faces.



Ces six forces de pression sont normales aux surfaces sur lesquelles elles s'appliquent (comme toujours pour des forces de pression). On peut donc écrire par exemple la force qui s'exerce sur la face avant d'équation $y = \text{Cste}$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{av}} = P(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_y}$$

puis de même sur toutes les autres surfaces

$$\begin{array}{lcrl}
\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{ar}} & = & -P(x,y+\mathrm{d}y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_y} & \qquad\text{(face arrière en } y+\mathrm{d}y)\\
\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{g}} & = & P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x} & \qquad\text{(face gauche en } x)\\
\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{d}} & = & -P(x+\mathrm{d}x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x} & \qquad\text{(face droite en } x+\mathrm{d}x)\\
\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{bas}} & = & P(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_z} & \qquad\text{(face du bas en } z)\\
\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{haut}} & = & -P(x,y,z+\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_z} & \qquad\text{(face haute en } z+\mathrm{d}z)
\end{array}$$

La force totale que le fluide extérieur exerce sur l'élément considéré est la somme de ces six forces, et on calcule

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\overrightarrow{F} &= \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{av}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{ar}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{g}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{d}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{h}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{b}}\\
&= \Big(P(x,y,z) - P(x,y+\mathrm{d}y,z)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_y}\\
&\quad + \Big(P(x,y,z) - P(x+\mathrm{d}x,y,z)\Big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}\\
&\quad + \Big(P(x,y,z) - P(x,y,z+\mathrm{d}z)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_z}\\
&= \underbrace{-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\,\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}\right)}_{=\overrightarrow{\text{grad}}\,P}\underbrace{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{=\mathrm{d}V}
\end{aligned}$$

et effectivement on réalise que la force de pression qui s'exerce sur l'élément $\mathrm{d}V$ est proportionnelle à $\mathrm{d}V$, et peut donc s'écrire formellement à partir d'un équivalent volumique $\overrightarrow{f}$ tel que

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{f}\,\mathrm{d}V \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P \qquad \text{l'équivalent volumique des forces de pression.}}$$

Nous emploierons le même raisonnement pour écrire l'équivalent volumique des forces de viscosité dans le chapitre H2.