EM8-Cours

Aspects énergétiques du champ EM

Ce chapitre très court est malgré tout très important, bien sûr pour les concours, mais aussi pour les chapitres sur les ondes électromagnétiques. Il y a trois formules à connaître par cœur, qu'on écrit directement ici

$$\boxed{\mathcal{P}_V = \vec{\jmath} \cdot \vec{E}, \qquad u = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,\vec{E}^2 + \frac{1}{2\,\mu_0}\,\vec{B}^2 \qquad \text{et} \qquad \vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$$

Le but de ce chapitre est de comprendre le sens et la physique derrière ces formules.

Table des matières

1 Puissance électromagnétique cédée à la matière (« terme d'échange »)

Le champ électromagnétique peut fournir de l'énergie à la matière. Pour le montrer, considérons un milieu matériel, composé en partie de particules chargées, dans lequel règne un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$.

Une charge q de ce milieu matériel subit de la part du champ électromagnétique la force de Lorentz

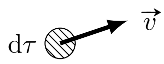
$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

La puissance reçue par la charge est alors

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\,\vec{E} \cdot \vec{v}$$

car la partie magnétique ne travaille jamais : $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonal à $\vec{v}$ donc $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$. Considérons maintenant un ensemble de charge q contenues dans un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$. La densité en particules est n (en m^{-3}). Les particules dans ce volume sont animées d'une vitesse $\vec{v}$ (c'est le champ de vitesse eulérien). Alors la puissance reçue par cet ensemble de $\mathrm{d}N = n\,\mathrm{d}\tau$ particules est la somme des puissances reçues individuellement, d'où

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \mathrm{d}N \times q\,\vec{E} \cdot \vec{v} = n\,\mathrm{d}\tau\,q\,\vec{v} \cdot \vec{E} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\tau} = n\,q\,\vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{\jmath} \cdot \vec{E}$$



puisqu'on reconnaît la définition du vecteur **densité surfacique de courant** $\vec{\jmath} = n\,q\,\vec{v}$.

Densité volumique de puissance électromagnétique cédée à la matière $\mathcal{P}_V$

En conclusion, nous avons montré que le champ électromagnétique fournit à la matière une puissance par unité de volume (ou puissance volumique)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\tau} = \mathcal{P}_V = \vec{\jmath} \cdot \vec{E} \qquad \left(\text{en } \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-3}\right)} \tag{1}$$

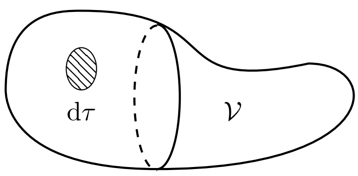
Dans l'équation de Poynting que nous écrivons en fin de chapitre, ce terme est appelé le **terme de Joule** car il rend notamment compte de l'effet Joule (échauffement d'un matériau soumis au passage d'un courant électrique en son sein).

En conséquence, dans un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ dans lequel règne un champ électromagnétique, la matière reçoit une puissance

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \mathcal{P}_V\,\mathrm{d}\tau = \vec{\jmath} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\tau$$

Et, dans un volume macroscopique $\mathcal{V}$, il reçoit une puissance

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_V\,\mathrm{d}\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\jmath} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\tau$$



Si la puissance volumique est uniforme, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la position, alors

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_V\, \mathcal{V}$$

Enfin, l'énergie fournie par le champ électromagnétique à la matière pendant une durée dt est

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t = \left(\iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_V\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t = \left(\iiint_{\mathcal{V}} \vec{\jmath}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t$$

Remarquons notamment que le champ électromagnétique ne fournit d'énergie à un matériau que si celui-ci est traversé par un courant ($\vec{\jmath} \neq \vec{0}$).

2 Énergie du champ électromagnétique (« terme de stockage »)

Si le champ électromagnétique peut céder de l'énergie à la matière comme nous l'avons compris précédemment, c'est qu'il possède cette énergie (puisque, rappelons-le, l'énergie est conservative).

Densité volumique d'énergie électromagnétique u

Le champ électromagnétique est caractérisé par une densité volumique d'énergie u (expression admise)

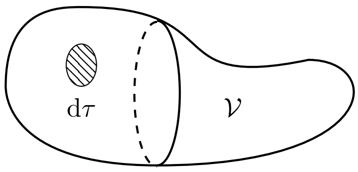
$$\boxed{u = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,||\vec{E}||^2 + \frac{1}{2\,\mu_0}\,||\vec{B}||^2 \qquad \left(\text{en J}\cdot\text{m}^{-3}\right)} \tag{2}$$

En conséquence, dans un volume élémentaire dτ dans lequel règne un champ électromagnétique, il y a une énergie

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = u\,\mathrm{d}\tau$$

Et, dans un volume macroscopique $\mathcal{V}$, il y a une énergie

$$\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}} u\,\mathrm{d}\tau$$



Si la densité volumique est uniforme, c'est-à-dire ne dépend pas de la position, alors

$$\mathcal{E} = u\,\mathcal{V}$$

On appelle respectivement

- $u_E = \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_0\,||\vec{E}||^2$ la densité volumique d'énergie électrique ;
- et $u_B = \dfrac{1}{2\,\mu_0}\,||\vec{B}||^2$ la densité volumique d'énergie magnétique ;

Rappelons par ailleurs que $||\vec{E}||^2 = \vec{E}\cdot\vec{E}$ (de même pour $\vec{B}$).

3 Flux d'énergie électromagnétique (« terme de transport »)

Nous venons d'admettre l'expression de l'énergie stockée dans le champ électromagnétique. Nous verrons par ailleurs que le champ électromagnétique est un objet qui peut se propager (nous le discuterons longuement dans les chapitres sur les ondes électromagnétiques). Par conséquent, on comprend que cette énergie peut être transportée par le champ électromagnétique.

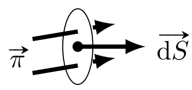
Vecteur densité surfacique de puissance électromagnétique $\vec{\pi}$

On admet l'expression du **vecteur de Poynting** $\vec{\pi}$, ou (vecteur) densité (surfacique) de puissance électromagnétique, ou encore (vecteur) densité (surfacique) de flux d'énergie électromagnétique, ou encore, plus concisément, puissance surfacique :

$$\boxed{\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} \qquad \left(\text{en W}\cdot\text{m}^{-2}\right)} \tag{3}$$

Il est tel que l'énergie électromagnétique qui traverse une surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ pendant $\mathrm{d}t$ est

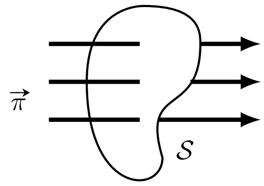
$$\mathrm{d}^2\mathcal{E} = \left(\vec{\pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}t$$



c'est-à-dire que la puissance qui traverse une surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \vec{\pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Finalement la puissance et l'énergie qui traversent une surface macroscopique $\mathcal{S}$ pendant $\mathrm{d}t$ sont



$$\mathcal{P} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\mathcal{E} = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t = \left(\iint_{\mathcal{S}} \vec{\pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}t$$

Si la surface $\mathcal{S}$ est plane, que $\vec{\pi}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ et que $\vec{\pi}$ est homogène, alors $\mathcal{P} = ||\vec{\pi}||\,\mathcal{S}$.

Remarque 1. Lien avec le vecteur de Poynting sonore. L'interprétation du vecteur de Poynting est identique à celle du vecteur de Poynting sonore $\vec{\pi} = p_1\,\vec{v_1}$: c'est une puissance surfacique, ici électromagnétique (alors qu'il s'agit (évidemment) d'une puissance acoustique pour le vecteur de Poynting sonore). Remarquez qu'ils portent le même nom, mais lorsqu'on parle du vecteur de Poynting (tout court) on parle de celui des ondes électromagnétiques, et on précise généralement « vecteur de Poynting sonore » pour les ondes acoustiques. Remarquez aussi qu'ils ont la même structure : une onde acoustique résulte du couplage entre un champ de surpression et un champ de survitesse, et le vecteur de Poynting sonore est le produit des deux : $\vec{\pi} = p_1\,\vec{v_1}$. De même, une onde électromagnétique résulte du couplage entre un champ électrique et un champ magnétique, et le vecteur de Poynting est le produit (vectoriel car ce sont deux vecteurs) entre les deux (à un facteur μ_0 près).

Remarque 2. Lien avec l'optique. $\vec{\pi}$ est un vecteur, dont la direction donne la direction de propagation de l'énergie électromagnétique (d'où le produit scalaire entre $\vec{\pi}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ dans l'expression de la puissance élémentaire : si $\vec{\pi}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$, l'énergie ne traverse pas la surface $\mathrm{d}S$ mais ne fait que la longer). Par ailleurs, la lumière est une onde électromagnétique, et est par conséquent caractérisée par un vecteur de Poynting. En fait, ce vecteur permet de faire un lien entre l'optique géométrique et l'électromagnétisme : la direction de $\vec{\pi}$ correspond à celle des rayons lumineux. En d'autres termes, **les rayons lumineux de l'optique géométrique sont les lignes de champ du vecteur de Poynting** de l'onde électromagnétique qu'est la lumière.

4 Conservation de l'énergie électromagnétique – Équation de Poynting

L'énergie est une grandeur conservative. Derrière les trois grandeurs que nous avons introduites ($\mathcal{P}_{\mathcal{V}} = \vec{\jmath} \cdot \vec{E}$, u et $\vec{\pi}$), se trouve par conséquent une équation de conservation.

Équation de conservation de l'énergie électromagnétique

Cette équation n'est pas à connaître par cœur. On admet l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique

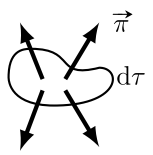
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\pi} = -\vec{\jmath} \cdot \vec{E}}$$

Cette équation, appelée **équation de Poynting**, prend une forme analogue aux autres équations de conservation que nous déjà rencontrées, comme celle de conservation de la masse en mécanique des fluides ou celle de la charge en électromagnétisme qui s'écrivent toutes deux

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\jmath} = 0$$

avec ϱ la densité volumique de masse (resp. de charge) et $\vec{\jmath} = \varrho\,\vec{v}$ le vecteur densité de courant de masse (resp. de charge). Remarquons par contre qu'elle possède un terme d'échange $-\vec{\jmath} \cdot \vec{E}$ (appelé **terme de Joule**) contrairement aux deux précédentes, puisque le champ électromagnétique peut perdre de l'énergie en en donnant à la matière. L'équation de Poynting se lit comme suit

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{(1)} = \underbrace{-\mathrm{div}\,\vec{\pi}}_{(2)}\ \underbrace{-\vec{\jmath} \cdot \vec{E}}_{(3)}$$



- (1) désigne la variation d'énergie électromagnétique dans un volume $\mathrm{d}\tau$ quelconque. D'après l'équation de Poynting, cette variation a deux causes listées ci-dessous ;

- (2) est la première cause : ce terme rend compte de l'énergie électromagnétique qui entre dans le volume du fait de son transport par le champ électromagnétique. Si le champ $\vec{\pi}$ diverge depuis le volume $\mathrm{d}\tau$, alors la direction de l'énergie est sortante d'où le « $-$ » de ce terme ;
- (3) est la deuxième cause : ce terme traduit que si il y a de la matière dans le volume $\mathrm{d}\tau$, alors celle-ci peut absorber une partie de l'énergie électromagnétique dans ce volume.

On peut intégrer cette équation sur un volume macroscopique $\mathcal{V}$, alors

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau = -\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{\pi}\,\mathrm{d}\tau - \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\jmath}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$$

puis utiliser le théorème de Green-Ostrograski pour le second terme, et inverser la dérivée temporelle et l'intégration spatiale du premier

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iiint_{\mathcal{V}} u\,\mathrm{d}\tau\right) = -\oiint_{\mathcal{S}} \vec{\pi}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} - \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\jmath}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$$

on reconnaît alors l'énergie électromagnétique $\mathcal{E}$ dans le volume $\mathcal{V}$ et la puissance cédée à la matière $\mathcal{P}$ dans ce même volume

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -\oiint_{\mathcal{S}} \vec{\pi}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} - \mathcal{P}$$

Cette équation est la version intégrale de l'équation de Poynting. Elle s'interprète de la même manière, et on peut retenir sa signification comme suit :

« la variation temporelle d'énergie = la puissance qui rentre − la puissance fournie à la matière »

Bien entendu la puissance qui entre est l'opposée de la puissance qui sort, d'où le « $-$ » du second terme.

Remarque. Dans le vide, $\vec{\jmath} = \vec{0}$ donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\pi} = 0$$

qui traduit que l'énergie du champ électromagnétique est conservée (elle n'est pas en partie cédée à la matière).

Tableau d'analogies électro-acoustiques. On conclut ce chapitre par un tableau d'analogie avec les grandeurs énergétiques de l'acoustique (on met entre parenthèses les expressions qui ne sont pas à connaître).

	Électromagnétisme		Acoustique
Champs	$\vec{E},\ \vec{B}$	$\longleftrightarrow$	$p_1,\ \vec{v_1}$
Densité volumique d'énergie	$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\vec{E}^2 + \frac{1}{2\,\mu_0}\,\vec{B}^2$	$\longleftrightarrow$	$\left(u = \frac{1}{2}\varrho_0\,\vec{v_1}^2 + \frac{1}{2}\chi_S\,p_1^2\right)$
Densité surfacique de flux d'énergie	$\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{\pi} = p_1\,\vec{v_1}$
Équation de conservation locale	$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\pi} = -\vec{\jmath}\cdot\vec{E}\right)$	$\longleftrightarrow$	$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\pi} = 0\right)$

Exercice. Capacité d'un condensateur plan par raisonnement énergétique.

1) Rappeler l'expression du champ électrostatique dans un condensateur plan (section S, épaisseur e). On introduira toutes les grandeurs nécessaires. Quelle est alors la densité volumique d'énergie électromagnétique u dans le condensateur ?

2) En déduire l'énergie $\mathcal{E} = u\,V$ stockée dans le condensateur, où V est le volume de celui-ci $V = S\,e$; puis obtenir la capacité du condensateur en identifiant l'énergie $\mathcal{E}$ aux lois de l'électrocinétique

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2\,C} \qquad \left(= \frac{1}{2}\,C\,U^2 \qquad \text{avec} \qquad Q = C\,U\right)$$