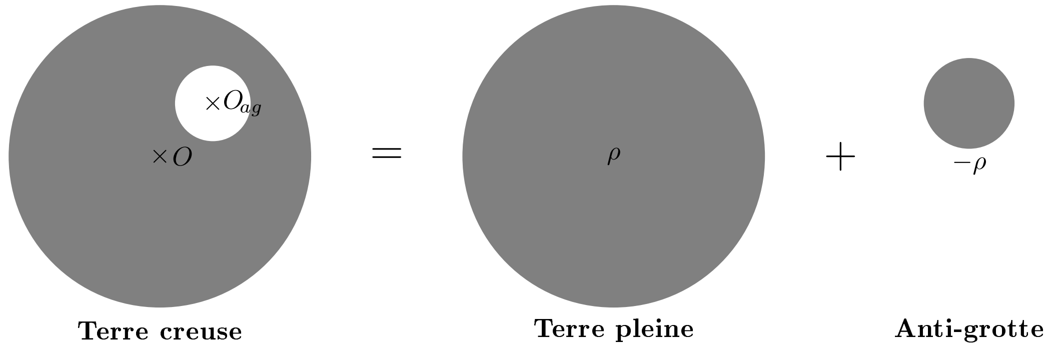
EM1-TD

Correction

EM1 — 04 Champ gravitationnel dans une grotte

(Théorème de superposition, théorème de Gauss, analogie gravito-électrique)

On commence par un schéma de la distribution des masses.



La distribution de masse de la Terre est la superposition de celle sans la grotte (Terre pleine), à laquelle on ajoute une « anti-grotte » de masse volumique négative $\rho_{ag} = -\rho$, de telle sorte que l'addition des deux conduit bien à cet endroit à une masse volumique nulle, c'est-à-dire une grotte.

Le champ gravitationnel dans la grotte de la Terre creuse est ainsi, par théorème de superposition, la somme de celui des deux contributions de la Terre pleine et de l'anti-grotte.

$$\vec{\mathcal{G}} = \overrightarrow{\mathcal{G}_T} + \overrightarrow{\mathcal{G}_{ag}}$$

Calculons ces deux champs. On rappelle pour cela le théorème de Gauss gravitationnel

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{G}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -4\,\pi\,G\,M_{\mathrm{int}}$$

Appliquons-le d'abord sur la Terre pleine. Commençons par l'étude des symétries et des invariances de la distribution des masses. Pour la Terre pleine centrée en O, les plans $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\varphi})$ (où M est un point quelconque dans la grotte et les trois vecteurs sont ceux du système de coordonnées sphérique) sont des plans de symétries de la distribution des masses (ils coupent la sphère en deux). Ce sont donc par principe de Curie également des plans de symétrie du champ garvitationnel. Par conséquent ce dernier appartient à ces plans : il est porté par $\overrightarrow{e_r}$.

$$\overrightarrow{\mathcal{G}_T} = \mathcal{G}_T(r, \theta, \varphi)\,\overrightarrow{e_r}$$

Par ailleurs, la distribution de masse est sphérique donc invariante par rotation d'angle θ et φ : le champ gravitationnel ne peut pas dépendre de ces variables par principe de Curie.

$$\overrightarrow{\mathcal{G}_T} = \mathcal{G}_T(r)\,\overrightarrow{e_r}$$

Le calcul du flux du champ gravitationnel à travers une sphère de centre O et de rayon $r < R_T$ donne alors

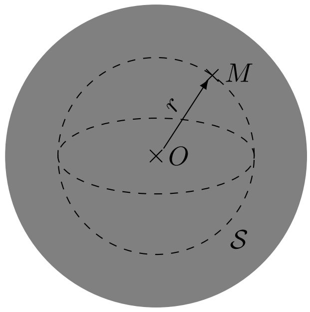
$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathcal{G}_T} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oiint_{\mathcal{S}} \mathcal{G}_T(r)\,\overrightarrow{e_r} \cdot \mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_r} = \oiint_{\mathcal{S}} \mathcal{G}_T(r)\,\mathrm{d}S = \mathcal{G}_T(r) \oiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S = 4\,\pi\,r^2\,\mathcal{G}_T(r)$$

Par ailleurs, le calcul de la masse M_{int} à l'intérieur de cette sphère homogène conduit à

$$M_{\mathrm{int}} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho$$

L'application du théorème de Gauss sur une sphère de centre O et de rayon $r < R_T$ permet de conclure que

$$4\,\pi\,r^2\,\mathcal{G}_T(r) = -\frac{16}{3}\,\pi^2\,r^3\,G\,\rho \qquad \text{soit} \qquad \mathcal{G}_T(r) = -\frac{4\,\pi\,G\,\rho}{3}\,r$$



Et finalement

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{G}_T} = -\frac{4\,\pi\,G\,\rho}{3}\,r\,\overrightarrow{e_r} = -\frac{4\,\pi\,G\,\rho}{3}\,\overrightarrow{OM}}$$

car $r\,\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{OM}$.

Regardons ensuite l'anti-grotte. Le même discours permet d'obtenir le champ dans « l'anti-grotte » de masse volumique $-\rho$:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{G}_{ag}} = -\frac{4\,\pi\,G\,(-\rho)}{3}\,\overrightarrow{O_{ag}M} = \frac{4\,\pi\,G\,\rho}{3}\,\overrightarrow{O_{ag}M}}$$

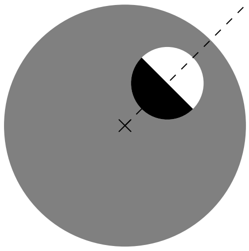
Dans cette expression M est obligatoirement un point **dans** l'anti-grotte.

Finalement pour la Terre creuse : le théorème de superposition mène directement au champ gravitionnel de la Terre creuse

$$\overrightarrow{\mathcal{G}} = \overrightarrow{\mathcal{G}_T} + \overrightarrow{\mathcal{G}_{ag}} = -\frac{4\,\pi\,G\,\rho}{3}\,\overrightarrow{OO_{ag}}$$

car $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O_{ag}M} = \overrightarrow{OO_{ag}}$. Le champ gravitationnel est donc **constant dans la grotte** (indépendant de M).

2) La surface libre du lac est orthogonale en tout point au champ de pesanteur. Puisque ce dernier est uniforme, **la surface libre est plane**. On dessine le lac ci-contre en noir :



Remarque. Attention à ne pas appliquer le théorème de Gauss sur la Terre creuse. Elle ne possède pas assez de symétrie pour conclure que $\overrightarrow{\mathcal{G}_T} = \mathcal{G}_T(r)\,\overrightarrow{e_r}$.

Remarque 2. Il n'y a que deux théorèmes permettant de calculer un champ gravitationnel : le théorème de Gauss et le théorème de superposition. Cet exercice en propose une élégante synthèse.