D2-TD

# Correction

## D2 — 19 Astéroïde radioactif

**1)** On dresse un bilan d'énergie en régime stationnaire : l'énergie de la partie de l'astéroïde comprise entre les sphères de rayon $r$ et $r+\mathrm{d}r$ ne varie pas dans le temps donc l'énergie thermique qui sort de la sphère de rayon $r+\mathrm{d}r$ vaut celle qui entre à travers la sphère de rayon $r$ plus l'énergie qui a été produite par radioactivité entre $r$ et $r+\mathrm{d}r$. Donc

$$j(r+\mathrm{d}r)\,S(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t = j(r)\,S(r)\,\mathrm{d}t + \dot{q}\,\mathrm{d}t\,\varrho\,4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r$$

avec $S(r)$ l'aire de la sphère de rayon $r$, c'est-à-dire $S(r) = 4\,\pi\,r^2$. Par conséquent

$$\frac{\mathrm{d}(j\,r^2)}{\mathrm{d}r} = \dot{q}\,\varrho\,r^2$$

qui s'intègre en

$$j(r) = \frac{\dot{q}\,\varrho\,r}{3} + \frac{A}{r^2} \qquad \text{avec} \qquad A \text{ une constante d'intégration.} \tag{1}$$

Puis la loi de Fourier donne $j(r) = -\kappa\,\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$ donc en intégrant

$$T(r) = -\frac{\dot{q}\,\varrho\,r^2}{6\,\kappa} + \frac{A}{\kappa\,r} + B \qquad \text{avec} \qquad B \text{ une constante d'intégration.}$$

Or $T(0) \neq \infty$ donc $A = 0$. Et $T(R) = T_S$ donc

$$T_S = B - \frac{\dot{q}\,\varrho\,R^2}{6\,\kappa} \qquad \text{soit} \qquad B = T_S + \frac{\dot{q}\,\varrho\,R^2}{6\,\kappa}$$

Finalement

$$\boxed{T(r) = T_S + \frac{\dot{q}\,\varrho}{6\,\kappa}\left(R^2 - r^2\right)}$$

**2)** Le flux thermique qui arrive par diffusion à la surface de l'astéroïde doit être égal au flux thermique évacué par radiation (sinon il y aurait une accumulation d'énergie sur cette surface, impossible en régime stationnaire) donc

$$\underbrace{\sigma\,T_S^4\,4\,\pi\,R^2}_{\text{ce qui part par radiation}} = \underbrace{j(R)\,4\,\pi\,R^2}_{\text{ce qui arrive par diffusion}}$$

On obtient ainsi

$$j(R) = \sigma\,T_S^4$$

mais par ailleurs, on sait par (1) que

$$j(R) = \frac{\dot{q}\,\varrho\,R}{3}$$

d'où pour conclure

$$\boxed{T_S = \left(\frac{\dot{q}\,\varrho\,R}{3\,\sigma}\right)^{1/4} = 20\,\mathrm{K}}$$