Équations différentielles

Dans cette fiche nous discutons les solutions des équations différentielles ordinaires linéaires du second ordre à coefficients constants homogènes (= sans second membre). Celles-ci s'écrivent, pour une fonction $x(t)$

$$a\,\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + b\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + c\,x = 0 \qquad \text{et son polynôme caractéristique est} \qquad a\,X^2 + b\,X + c$$

► Il n'y a que deux cas possibles : soit le polynôme caractéristique a deux racines (a priori complexes) λ_1 et λ_2, soit ces deux racines sont identiques donc il n'y en a en fait qu'une seule λ_0.

► Ce dernier cas ne se rencontre qu'exceptionnellement en physique, c'est pourquoi on l'évacue rapidement : la solution est

$$x(t) = \big(A\,t + B\big)\,\mathrm{e}^{\lambda_0\,t}$$

Les constantes d'intégration A et B se déterminent à l'aide des conditions initiales (ou aux limites).

► Si il y a deux solutions (a priori complexes), alors la solution de l'équation différentielle est

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{\lambda_1\,t} + B\,\mathrm{e}^{\lambda_2\,t}$$

Les constantes d'intégration A et B se déterminent à l'aide des conditions initiales (ou aux limites). Le travail consiste donc à trouver les deux racines λ_1 et λ_2 du polynôme caractéristique.

Cas d'intérêt. Un cas nous intéresse particulièrement en physique, et notamment en physique quantique : celui où $b = 0$. En divisant par a et en écrivant $d = -c\,/\,a$, l'équation différentielle devient

$$\ddot{x} - d\,x = 0$$

et les racines du polynôme caractéristique vérifient

$$\lambda^2 - d = 0 \qquad \text{soit} \qquad \lambda^2 = d$$

On trouve ces racines avec la méthode suivante :

— si d est réel et $d > 0$, alors

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{d} \qquad \text{et} \qquad x(t) = A\,\mathrm{e}^{\sqrt{d}\,t} + B\,\mathrm{e}^{-\sqrt{d}\,t}$$

qu'on peut aussi écrire sous forme de cosinus hyperbolique/sinus hyperbolique

$$x(t) = A'\,\mathrm{ch}\,\sqrt{d}\,t + B'\,\mathrm{sh}\,\sqrt{d}\,t \qquad \text{car} \qquad \mathrm{ch}\,x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\,x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

avec $A = (A' + B')\,/\,2$ et $B = (A' - B')\,/\,2$.

— si d est réel et $d < 0$, alors

$$\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\,\sqrt{-d} \qquad \text{et} \qquad x(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\sqrt{d}\,t} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\sqrt{d}\,t}$$

qu'on peut aussi écrire sous forme de cosinus/sinus

$$x(t) = A'\cos\sqrt{d}\,t + B'\sin\sqrt{d}\,t \qquad \text{car} \qquad \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2\,\mathrm{i}}$$

avec $A = A'\,/\,2 + B'\,/\,(2\,\mathrm{i})$ et $B = A'\,/\,2 - B'\,/\,(2\,\mathrm{i})$.

— si d est complexe quelconque, on l'écrit sous forme exponentielle $d = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et les racines sont alors

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}$$

***Preuve que** $A\,\mathrm{e}^{\lambda\,t}$ **est solution.** En introduisant cette forme dans l'équation différentielle, et sachant que*

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{\lambda\,t}}{\mathrm{d}t} = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\,t} \qquad \textit{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{e}^{\lambda\,t}}{\mathrm{d}t^2} = \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda\,t}$$

on tombe sur

$$A\left(a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c\right)\mathrm{e}^{\lambda\,t} = 0$$

Puisque l'exponentielle n'est jamais nulle et $A \neq 0$ (sinon solution nulle sans intérêt), il faut effectivement que λ soit une racine du polynôme caractéristique

$$a\,X^2 + b\,X + c$$

… Et on comprend par cette démonstration qu'on peut généraliser au cas d'une équation d'ordre n sans difficultés.