T3-TD Rayonnement thermique

T3 — 01 Albédo de la Terre

(Amélioration du modèle du cours par la prise en compte de la réflexion d'une partie du rayonnement reçu.)

On cherche à obtenir la température à la surface de la Terre, dans un premier temps sans prendre en compte l'effet de serre dû à l'atmosphère, mais en prenant en compte l'albédo de la Terre, puis en tenant compte des deux à la fois. On donne $\sigma = 5{,}670 \times 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$.

1) On donne le rayon du Soleil $R_S = 7{,}0 \times 10^5$ km et sa température de surface $T_S = 5{,}8 \times 10^3$ K. En faisant l'hypothèse que le Soleil rayonne comme le corps noir, calculer la puissance totale qu'il émet.

2) La distance entre la Terre et le Soleil est $d_{TS} = 1{,}5 \times 10^{11}$ m. Quelle est la puissance surfacique φ reçu à la surface de la Terre ?

3) Le rayon de la Terre est $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km. En considérant que la Terre reçoit le flux solaire comme si elle était un disque orthogonal au flux, déterminer la puissance totale moyenne reçue par la Terre.

4) La Terre réfléchit une partie $A \approx 0{,}31$ de la puissance reçue, où A est appelé l'albédo de la Terre. En considérant que la Terre émet un rayonnement de corps noir à T_T, écrire l'équilibre radiatif et déterminer la température T_T. Commentaire.

5) Refaire le même calcul en prenant en compte l'effet de serre dû à l'atmosphère, qu'on modélisera comme un corps noir pour les infra-rouges et comme complètement transparent pour le visible.

T3 — 02 Rayonnement et convection

(Comparaison des pertes thermiques par convection et par rayonnement pour une maison.)

On souhaite comparer les deux phénomènes dans le cas d'un mur de surface $S = 10\ \mathrm{m^2}$ séparant un intérieur à $T_i = 10°\mathrm{C}$ de l'extérieur à $T_e = 0°\mathrm{C}$.

1) Le coefficient conducto-convectif avec l'air extérieur est $h = 10\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$. Évaluer numériquement les pertes thermiques à travers le mur par ce mode de transfert en utilisant la loi de Newton

$$\mathcal{P} = h\,(T_i - T_e)\,S$$

2) On suppose que l'intérieur rayonne comme un corps noir. Préciser λ_m, longueur d'onde pour laquelle le flux radiatif est maximal. Évaluer numériquement les pertes thermiques par rayonnement.

3) En fait l'extérieur rayonne aussi comme un corps noir, et fournit par ce mode de transfert un flux thermique à l'intérieur. En ajoutant ce phénomène, évaluer numériquement le flux radiatif total cédé par l'intérieur à l'extérieur.

4) L'écart de température étant petit $T_i \approx T_e$, montrer que le flux radiatif total suit également une « loi de Newton », dont on précisera le coefficient de transfert h' en fonction de σ et T_e.

T3 — 05 Nuit de pleine Lune (Résolution de problème)

1) On donne l'albédo de la Lune $\alpha = 0{,}07$. À quel point le Soleil est-il plus lumineux que la Lune, vu depuis la Terre ?

Données. La température de surface du Soleil est $T_S = 5800$ K, le rayon du Soleil $R_S = 6{,}95 \times 10^5$ km, la distance Terre-Soleil $d_{TS} = 150 \times 10^6$ km, le rayon de la Lune $R_L = 1700$ km, et la distance Terre-Lune $d_{TL} = 3{,}8 \times 10^5$ km.

Définition : L'albédo est la fraction du flux surfacique incident réfléchi par la surface considérée.

T3 — 08 Astéroïde

On considère un astéroïde sphérique de rayon R, de masse volumique homogène ϱ et de capacité thermique massique c. On note $T(t)$ sa température et $T(0) = T_0$ sa température initiale. Cet astéroïde est perdu dans l'infinité de l'univers.

1) Justifier que les seuls échanges énergétiques possibles avec l'extérieur se font par rayonnement.

La température de l'univers est considérée suffisamment faible pour être prise nulle. On suppose que l'astéroïde rayonne comme un corps noir.

2) Sa température initiale est $T_0 = 20$ K. Dans quel domaine électromagnétique émet-il maximalement ?

3) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par T est

$$\varrho\, c\, \frac{R}{3}\, \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\sigma\, T^4$$

4) En déduire que la solution est

$$T(t) = \frac{T_0}{\left(1 + 3\,\alpha\, T_0^3\, t\right)^{1/3}} \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{3\,\sigma}{\varrho\, c\, R}$$

T3 — 04 Lois du rayonnement du corps noir à l'équilibre

(démonstrations des lois de Wien et de Stefan à partir de la loi de Planck)

Le flux surfacique émis par le corps noir a une composition spectrale donnée par la loi de Planck

$$F(\lambda) = \frac{2\,\pi\, h\, c^2}{\lambda^5}\, \frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\, c}{k_B\, T\, \lambda}\right) - 1}$$

1) Donner le nom et la valeur des constantes c, k_B et h.

2) Déduire de l'expression de $F(\lambda)$ la loi de déplacement de Wien.

3) Pour un rayonnement électromagnétique dans le vide, quel est le lien entre la longueur d'onde λ et la fréquence ν ? En déduire le lien entre $\mathrm{d}\nu$ et $\mathrm{d}\lambda$.

4) Exprimer alors la composition spectrale $G(\nu)$ du rayonnement du corps noir, sachant que le flux surfacique élémentaire s'écrit

$$\mathrm{d}\varphi = F(\lambda)\, |\mathrm{d}\lambda| = G(\nu)\, |\mathrm{d}\nu|$$

5) En posant $x = h\,\nu/(k_B\, T)$, intégrer la densité de flux surfacique pour obtenir le flux surfacique total

$$\varphi = \int_0^\infty G(\nu)\, \mathrm{d}\nu$$

Montrer qu'on obtient la loi de Stefan. Identifier la constante de Stefan et faire l'application numérique.

Données :

2) L'unique solution non nulle de

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - \frac{1}{5}\, x$$

est $x_m \approx 4{,}96$ (on pourra chercher à retrouver $x_m \approx 5$ graphiquement).

5) On donne l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$$

T3 — 06 Approximations de Wien et de Rayleigh-Jeans

(aspects historiques)

La loi de Planck (donnée ci-dessous en fonction de la fréquence ν) est arrivée historiquement après deux autres lois décrivant les comportements hautes et basses fréquences de la densité spectrale du rayonnement thermique.

$$G(\nu) = \frac{2\,\pi\,h\,\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\,\nu}{k_B\,T}\right) - 1}$$

1) Construire une fréquence caractéristique puis une longueur caractéristique à partir de h, c, k_B et T.

2) La première loi, due à Wien en 1896 (qu'on appelle ici « loi de Wien », mais attention à ne pas la confondre avec la loi de déplacement de Wien $\lambda_{\text{max}}\,T \approx 3\ \text{mm}\cdot\text{K}$) a été introduite expérimentalement. Le résultat obtenu correspond en fait à l'approximation haute fréquence de la loi de Planck. Trouver cette première loi à partir de la loi de Planck.

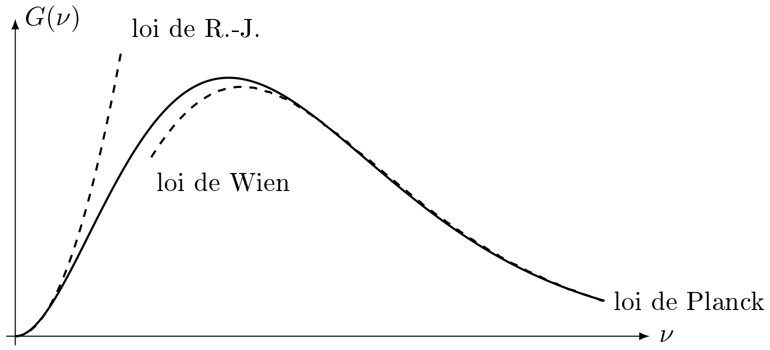
3) La deuxième loi, dite de Rayleigh-Jeans (1900, quelques mois avant la généralisation de Planck), a été démontrée théoriquement à partir d'un raisonnement purement classique (au sens non quantique). Elle est quant à elle l'approximation basse fréquence de la loi de Planck. Obtenir la loi de Rayleigh-Jeans.

4) Pour $T = 1000$ K (four), calculer la longueur caractéristique de la question **1**, et conclure si la lumière visible émise suit la loi de Wien ou de Rayleigh-Jeans.

Remarque. La loi de Rayleigh-Jeans prévoit une dépendance de la densité spectrale du rayonnement thermique en ν^2, et tend donc vers l'infini lorsque ν tend vers l'infini : le constat de cette divergence à haute fréquence a été surnommé la « catastrophe ultraviolette » (les ultraviolets étant des rayonnements de haute fréquence vis-à-vis du visible).

Remarque. On schématise ci-dessous les deux lois discutées ici. Planck, grâce à un raisonnement quantique, a trouvée la loi générale, englobant les dépendances correctes à la fois à haute et basse fréquence, sauvant ainsi la théorie du rayonnement thermique de cette catastrophe ultraviolette.

Remarque. Le calcul de Planck (1900) est en fait le premier calcul quantique de l'histoire de la physique. La constante h qui porte maintenant son nom y a fait sa première apparition. Il est remarquable de voir que le calcul de Planck devance d'au moins 5 ans l'apparition du concept de photon (Einstein, 1905) et d'une vingtaine d'années l'avènement de la mécanique quantique par l'équation de Schrödinger (1926).



T3 — 03 Effet de serre par plusieurs vitres

On étudie l'effet de serre produit par l'interposition d'une vitre au-dessus d'une plaque qui reçoit le rayonnement solaire. La plaque est noircie et assimilée à un corps noir. Le verre est supposé totalement transparent au rayonnement solaire (sauf à la question 3 où l'on tient compte du rayonnement solaire réfléchi). La vitre est en revanche totalement absorbante pour le rayonnement infrarouge émis par la plaque qui absorbe le flux solaire surfacique supposé arriver normalement à la vitre et à la plaque.

1) On suppose l'équilibre radiatif de la plaque et de la vitre. Écrire les équations exprimant ces équilibres et en déduire la température T de la plaque.

2) Le flux solaire est $\varphi_S = 0{,}6\ \text{kW}\cdot\text{m}^{-2}$. Calculer la température T de la plaque et la température T_v de la vitre.

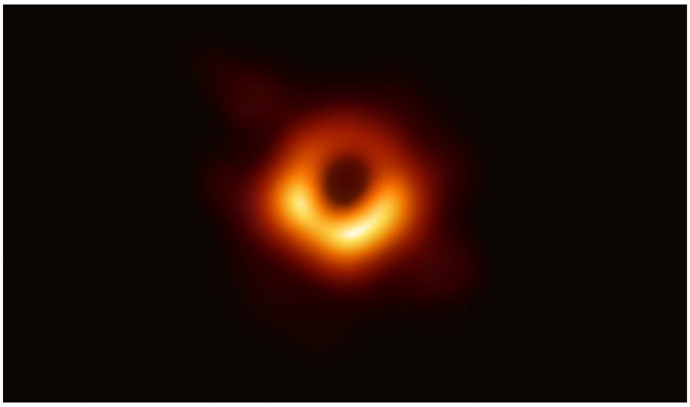
3) Reprendre les mêmes questions dans le cas de 2 vitres puis de n vitres.

4) Dans cette question on prend en compte le fait que les vitres réfléchissent une fraction r du rayonnement solaire incident. Montrer qu'il existe une valeur n_{opt} optimale du nombre de vitres pour maximiser T. Faire l'application numérique pour $r = 0{,}08$.

T3 — 07 Rayonnement Hawking

(analyse dimensionnelle)

Le 10 avril 2019 la collaboration Event Horizon Telescope a publié la première photo d'un trou noir (ci-dessous), celui au centre de la galaxie M87. Ce trou noir a une masse d'environ $6{,}5 \times 10^9\, M_S$ où $M_S = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg est la masse du Soleil. *(La masse d'un trou noir n'est pas nécessairement si élevée dans le cas général.)*



Selon la relativité générale (classique, c'est-à-dire non quantique), un trou noir se caractérise par une attraction gravitationnelle si forte dans l'espace qui l'entoure que rien, ni même la lumière, ne peut s'en échapper, une fois à l'intérieur de « l'horizon » du trou noir.

Cependant, en combinant relativité (gravitation) et mécanique quantique, Stephen Hawking a démontré que, par un effet quantique relativiste, un trou noir doit néanmoins émettre un rayonnement de corps noir caractérisé par la **température de Hawking** T_H. Cela veut dire que le trou noir se comporte comme un corps noir qui émet un rayonnement de corps noir à cette température T_H. Dans la suite on admettra simplement ce résultat.

1) Rappeler la loi de Stefan-Boltzmann. Que peut-on conclure pour la puissance rayonnée par le Soleil ? À quelle perte de masse par an cela correspond-il (on utilisera la relation bien connue $E = m\,c^2$) ? On donne $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$, $T_S = 5{,}9 \times 10^3$ K et $R_S = 7{,}0 \times 10^5$ km.

2) Hawking a trouvé que pour un trou noir (sphérique) de masse M la température de Hawking est $T_H \propto 1 / M$. Déterminer la relation correcte, à un facteur numérique près (qui s'avère être $1 / (8\,\pi)$). On utilisera en particulier les constantes fondamentales de la physique c, G, $\hbar$ et k_B.

3) La taille d'un trou noir est caractérisée par son rayon de Schwarzschild $R_H \propto M$. Comme ci-dessus, trouver la bonne relation entre R_H et M à un facteur numérique près (qui sera 2).

4) En considérant le trou noir de masse M comme un corps noir sphérique de rayon R_H et de température T_H, calculer la puissance rayonnée. Quelle masse devrait avoir le trou noir pour que cette puissance soit comparable à celle du Soleil ? À quelle perte de masse correspond ce rayonnement ? Obtenir la durée de vie τ d'un trou noir du seul fait de cette « évaporation de Hawking ». On utilisera que la constante de Stefan est

$$\sigma = \frac{2\,\pi^5\,k_B^4}{15\,h^3\,c^2}$$

5) Calculer cette durée de vie pour le trou noir au centre de la galaxie M87. Quel phénomène d'importance n'a-t-on pas pris en compte ? Dans quel sens cela fait-il évoluer la durée de vie ?

Données. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ S.I., $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}$ S.I., $c = 3{,}00 \times 10^8$ S.I.

Remarque. Vous venez de calculer la durée de vie d'un trou noir par évaporation Hawking... Comment votre âme de physicien(ne) le vit-elle ? Voilà en tout cas de quoi briller dans les dîners mondains.

4) Réponse : $\tau = 5120\,\pi\,G^2\,M_0^3 / (\hbar\,c^4)$ si M_0 est la masse initiale.