O 7/8 -TD

Ondes électromagnétiques dans les plasmas

O7 — 01 Petites questions indépendantes

1) Énoncer les hypothèses utilisées pour modéliser un plasma. En déduire la conductivité complexe du plasma, puis la relation de dispersion dans le plasma.

2) Définir et calculer numériquement la pulsation plasma pour la ionosphère ($n \approx 10^{10}$ m^{-3}). Commenter.

3) Montrer que dans un plasma une OPPH électromagnétique à haute fréquence a la même structure que dans le vide. Qu'en est-il à basse fréquence ?

4) Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe dans le plasma. Faut-il s'inquiéter d'obtenir $v_\varphi > c$?

5) En quoi consiste le modèle de Drüde ? Celui-ci fait intervenir un temps typique τ. Que vaut-il pour le cuivre (avec $n \approx 10^{29}$ m^{-3}) ?

6) Énoncer les hypothèses utilisées pour modéliser un conducteur. Obtenir alors la conductivité complexe du conducteur, et distinguer deux régimes limites.

7) Pour $\omega \ll 1/\tau$, obtenir l'équation différentielle vérifiée par le champ électrique dans le conducteur. En déduire la relation de dispersion puis obtenir l'épaisseur de peau dans le conducteur.

O7 — 02 Ondes longitudinales dans un plasma

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peu dense. On pose

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}} \exp\left(\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right) \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B_0}} \exp\left(\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right)$$

On suppose la densité volumique $\underline{\varrho}$ **non nulle** (le plasma n'est pas localement neutre).

1) Établir l'équation du mouvement d'un électron de masse m_e et de charge $-e$, associé à la densité n_e, en faisant les approximations qui sembleront nécessaires. Montrer que l'on peut définir une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ pour le plasma.

2) À l'aide des équations de Maxwell, établir une autre expression de $\underline{\gamma}$, en fonction de ω et de ε_0.

3) Montrer que $\underline{\vec{B}} = \vec{0}$. En déduire que l'onde est longitudinale. Quelle est sa pulsation ? Finalement, que nous apprend cet exercice ?

O7 — 03 Guide d'onde

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Deux plans métalliques parfaitement conducteurs en $x = 0$ et $x = a$ délimitent un guide d'onde de longueur infinie suivant z et y, dans lequel il n'y a que du vide. On étudie dans ce guide la propagation d'une onde suivant la direction z

$$\vec{E} = f(x)\cos(\omega t - k z)\,\vec{e_y}$$

1) Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit f.

2) Les plans étant parfaitement conducteurs, ils imposent la nullité du champ électrique. Obtenir alors la forme de f. On introduira un nombre entier n.

3) Comment s'appelle la solution que vous venez de calculer ? La décrire : est-elle plane ? progressive ? harmonique ? transverse ? homogène ?

4) Obtenir le champ magnétique associé. L'onde est-elle « transverse magnétique » ?

5) Exprimer ω en fonction de k et d'autres grandeurs. Tracer $\omega(k)$ pour plusieurs valeurs de n.

6) Quelle est la fréquence des ondes du domaine visible ? Et celle dans un four à micro-ondes ? Pourquoi les portes d'un micro-ondes sont-elles grillagées ? Pouvez-vous dire quel est le pas du grillage ?

7) Calculer le vecteur de Poynting.

8) Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

O7 — 04 Bilan énergétique pour une OPPH dans un plasma

La plasma est constitué d'une part d'électrons de masse m_e, de charge $-e$ et de densité n_e ; et d'autre part d'ions positifs quasiment immobiles car de masse très supérieure à celle des électrons. Le plasma est localement neutre de sorte que la densité volumique de charge du plasma est nulle $\rho = 0$. Sa conductivité complexe est

$$\sigma = -\mathrm{i}\,\varepsilon_0\,\frac{\omega_p^2}{\omega} \qquad \text{avec} \qquad \omega_p = \sqrt{\frac{n_e\,e^2}{\varepsilon_0\,m}}$$

On étudie la propagation d'une OPPH $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\big(\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,z)\big)\,\vec{e_x}$. On rappelle la relation de dispersion du plasma

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

On se place dans le cas $\omega > \omega_p$.

1) Y a-t-il propagation dans ce cas ? Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\pi}$.

2) Exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique u, puis la puissance volumique cédée au plasma par l'onde.

3) On rappelle l'équation locale de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\pi} = -\vec{\jmath}\cdot\vec{E}$$

Décrire chacun des termes de cette équation et montrer qu'elle est vérifiée dans le cas du plasma étudié.

On se place maintenant dans le cas $\omega < \omega_p$.

4) Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting et commenter.

O7 — 05 Ondes radio dans l'eau de mer ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

On étudie la propagation d'ondes radio (ou « hertziennes ») dans l'eau de mer. On admet que l'eau de mer est localement neutre ($\varrho = 0$). Elle possède une conductivité réelle et constante $\sigma = 6{,}23\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$. On admet aussi que l'eau a un comportement diélectrique, ce qui signifie qu'il faut remplacer dans les équations de Maxwell la permittivité ε_0 par $\varepsilon_0\,\varepsilon_r$, avec $\varepsilon_r = 80$ (sans dimension).

1) On considère une onde hertzienne de fréquence de l'ordre du GHz. Donner les équations de Maxwell dans le milieu diélectrique. D'où vient la conductivité de l'eau salée ? Commenter la valeur de σ, par comparaison avec le cuivre.

2) Déterminer l'équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$.

3) Établir la relation de dispersion. Dans quel domaine, haute ou basse fréquence, peut-on négliger l'absorption ? Calculer dans ce cas la vitesse de phase de l'onde. Le milieu est-il dispersif ?

4) La fréquence de l'onde étudiée est $f = 100$ MHz. Quelle est la longueur typique d'atténuation de l'onde ? Pourquoi n'utilise-t-on pas des ondes hertziennes pour les communications sous-marines ?

O7 — 07 Bilan énergétique dans un conducteur ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

On considère un milieu conducteur remplissant le demi-espace $z > 0$. On envoie une OPPH

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\big(\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,z)\big)\,\vec{e_x}$$

sur ce conducteur depuis le demi-espace vide $z < 0$. L'onde a une pulsation $\omega \ll 1/\tau$.

1) Donner la relation de dispersion dans le conducteur. En déduire le champ électrique réèl dans le conducteur.

2) Dans le conducteur, vérifier explicitement la conservation de l'énergie

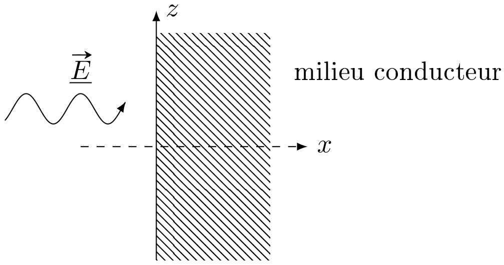
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\pi} = -\vec{\jmath}\cdot\vec{E}$$

O7 — 10 Effet de peau dans un fil de cuivre

On considère un milieu conducteur **neutre** remplissant le demi-espace $x > 0$, fait de cuivre de conductivité statique $\gamma_0 = 6,0 \times 10^7\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$. Dans le demi espace $x < 0$ règne un champ électrique

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k x)\, \vec{e_z}$$

On admet que le champ électrique est continu en $x = 0$.



1) Rappeler la conductivité complexe du milieu conducteur obtenue dans le cadre du modèle de Drüde. On introduira le temps de Drüde τ. Dans quel domaine de pulsation la conductivité est-elle purement réelle ?

2) On envoit une onde de fréquence 1 kHz. Simplifier la conductivité dans ce cas.

3) On considère pouvoir travailler dans l'ARQS. Donner les équations de Maxwell sous cette approximation.

4) Obtenir l'équation de propagation du champ électrique dans le milieu conducteur. Comment s'appelle-t-elle ? Quel est le coefficient de diffusion associé ?

5) Obtenir finalement la relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$, en faisant apparaître une épaisseur de peau δ qu'on explicitera.

6) Vu la forme du champ à l'extérieur du conducteur, on cherche le champ électrique à l'intérieur de celui-ci sous la forme

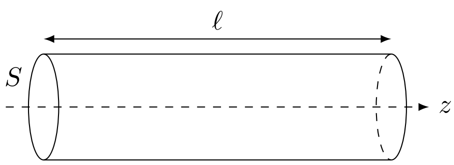
$$\underline{\vec{E}} = E'_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega t - \underline{k}\, x + \varphi)}\, \vec{e_z}$$

Calculer le champ électrique réel puis identifier E'_0 et φ par continuité.

7) En déduire le vecteur densité de courant $\vec{\jmath}$.

8) Sur quelle profondeur typique le courant circule-t-il dans le conducteur ? L'évaluer numériquement pour le signal étudié. Le champ électrique est donc confiné proche de la surface du conducteur. Dans ce contexte, on parle aussi de « profondeur de pénétration » pour cette distance (au regard de la pénétration du champ $\vec{E}$ extérieur dans le conducteur).

On souhaite maintenant étudier un morceau de conducteur cylindrique (un fil de cuivre de TP), et on admet que la phénomélogie établie précédemment reste valable : le champ électrique est confiné sur les bords latéraux du conducteur sur une distance typique δ.



9) Rappeler l'expression de la résistance R du fil conducteur en fonction de sa section S, sa conductivité γ_0 et sa longueur ℓ.

10) Pour justifier en partie que les résultats précédents sont valables, montrer que l'hypothèse d'ARQS est largement vérifiée pour un fil de TP de longueur $\ell = 1$ m.

11) On considère un fil de cuivre de rayon $r = 0,5$ mm. L'effet de peau (le confinement du courant sur les bords du conducteur) doit être pris en compte si $\delta < r$. À partir de quelle fréquence est-ce le cas ?

12) On se place à une fréquence pour laquelle cela est largement vérifié : $\delta \ll r$. Proposer alors une nouvelle expression (qualitative) de la résistance du fil en fonction de la fréquence, en prenant pour section S la section effectivement parcourue par le courant (figure ci dessous).

Figure. Le courant traverse toute la section du conducteur si $\delta > r$, et reste en bordure sur une profondeur δ si $\delta \ll r$.

13) Justifier pourquoi le transport de très forts courants à haute fréquence est en pratique assuré par des tresses de fils fins plutôt que par un seul gros fil (figure ci-dessous).

Figure. (à gauche) Tresse de fils fins. (à droite) Gros fil unique.

O7 — 08 Ondes magnétohydrodynamiques dans un fluide conducteur

Un fluide au repos, **neutre**, conducteur de conductivité σ, est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0} = B_0\,\overrightarrow{u_z}$. La masse volumique du fluide ϱ_0 et sa pression p_0 sont uniformes. On note n la densité d'électron en nombre (en m^{-3} donc).

Cet état de repos est perturbé par la propagation d'une onde plane électromagnétique décrite par les champs suivants :

— vitesse $\vec{v} = \overrightarrow{v_1}(z,\,t)$;
— pression $p = p_0 + p_1(z,\,t)$;
— champ électrique $\vec{E} = \overrightarrow{E_1}(z,\,t)$;
— champ magnétique $\vec{B} = \overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B_1}(z,\,t)$;
— et enfin densité de courant $\vec{\jmath} = \overrightarrow{\jmath_1}(z,\,t)$.

où les grandeurs indicées $_1$ sont des infiniments petits d'ordre 1 devant les grandeurs au repos (c'est une approximation acoustique !).

L'écoulement du fluide est supposé non relativiste et parfait. Il est de plus supposé incompressible, si bien que la masse volumique est inchangée $\varrho = \varrho_0$ même en présence de l'onde.

Dans ce milieu conducteur, en mouvement à $\vec{v}$ et plongé dans un champ $\overrightarrow{B_0}$, on admet la loi constitutive

$$\vec{\jmath} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{B_0}\right)$$

avec σ la conductivité du milieu.

1) Pour simplifier, on considère que le fluide a une conductivité infinie (on parle de conducteur parfait). En déduire un lien entre $\overrightarrow{E_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{B_0}$.

2) Toujours pour simplifier, on supposera pouvoir travailler dans le cadre de l'ARQS. Écrire les équations de Maxwell adaptées à ce cas.

3) Pour clore la modélisation, il nous reste à décrire la dynamique du fluide. Pour un fluide parfait, dans le cadre de l'approximation acoustique, cette équation est

$$\varrho_0 \frac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1 + \vec{\jmath} \wedge \overrightarrow{B_0}$$

D'où provient cette équation ? Identifier l'équivalent volumique des forces magnétiques de Laplace.

4) Dans la suite, on s'intéresse à des ondes planes progressives harmoniques en $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t - k\,z)}$. Montrer que le champ électrique, le champ magnétique et le champ de vitesse sont transversaux.

5) Montrer que la surpression p_1 est nulle (on raisonnera par un argument « géométrique »). Cette onde magnétohydrodynamique n'est ainsi pas couplée à une onde de surpression.

6) Déduire la relation de dispersion vérifiée par ω et k, puis conclure.

O7 — 09 Structure d'une OPPH dans un plasma

1) Discuter extensivement la structure d'une OPPH dans un plasma dans la zone de transparence $\omega > \omega_p$. On regardera l'aspect transverse électrique, transverse magnétique, le caractère de trièdre direct de $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$, l'amplitude de $\vec{B}$ en fonction de celle de $\vec{E}$ ainsi que la phase de $\vec{B}$ en fonction de celle de $\vec{E}$.

2) Même question dans la zone réactive $\omega < \omega_p$.