O6-TD
Ondes électromagnétiques dans le vide

O6 — 01 Photon de masse non nulle ?

1) Le photon a-t-il une masse ? une charge électrique ? Quelle est l'énergie E d'un photon de pulsation ω ? Quelle est sa quantité de mouvement p ?

Dans l'hypothèse d'un photon de masse non nulle (mais faible), on montre que les équations de Maxwell sont changées en

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} - \eta^2\, V \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \eta^2\,\vec{A}$$

où on fait apparaître les potentiels scalaire V et vecteur $\vec{A}$ définis par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}$$

Les autres équations (comment s'appellent-elles ?) sont inchangées.

2) Quelle est la dimension de η ?

3) Rappeler l'équation locale de conservation de la charge. En déduire que

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

4) Établir l'équation de propagation de $\vec{E}$ dans le vide. En déduire le lien entre ω et k pour une onde plane progressive harmonique.

5) On peut associer à cette onde un photon. Une relation due à Einstein donne pour une particule de masse m que

$$E^2 = p^2\,c^2 + m^2\,c^4$$

avec c la vitesse de la lumière dans le vide. Obtenir alors la masse du photon.

O6 — 02 Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres séparés par un espace vide. On note a (respectivement b) le rayon intérieur (respectivement extérieur) de l'espace vide.

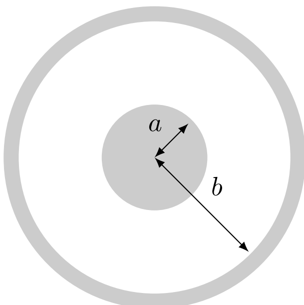
Une onde électromagnétique se propage dans l'espace entre les armatures : on donne la forme des champs

$$\vec{E} = E(r)\,\exp\left(\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,z)\right)\,\vec{u_r} \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = B(r)\,\exp\left(\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,z)\right)\,\vec{u_\theta}$$

1) Déterminer $E(r)$. On notera E_0 le champ en $r = a$.

2) Déterminer $B(r)$.

3) Établir l'équation de propagation du champ et en déduire une relation entre ω et k. Comment s'appelle cette relation ?



4) Obtenir la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

Données : On donne les opérateurs en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

et

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}$$

O6 — 03 Étude d'un rayon laser (Résolution de problème)

On récupère au fond d'un placard un laser sur lequel est indiqué la section du faisceau émis $S = 4\ \text{mm}^2$ et l'amplitude du champ électrique $E_0 = 430\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$.

1) Pouvez-vous retrouver la puissance moyenne du faisceau ?

O6 — 04 Onde cylindrique

On étudie une onde électromagnétique cylindrique, émise par des sources situées le long d'un axe (Oz). L'onde se propage dans le vide. En coordonnées cylindriques, le champ électrique s'écrit

$$\underline{\vec{E}} = E(r)\,\exp\left(\mathrm{i}(\omega\,t - k\,r)\right)\vec{u_z}$$

1) Déterminer le champ magnétique associé à ce champ électrique, en fonction de $E(r)$ et de $\mathrm{d}E\,/\,\mathrm{d}r$.

On donne $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(U\,\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U \wedge \vec{a} + U\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}$ pour des champs U et $\vec{a}$ quelconques ; et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U(r) = \dfrac{\partial U}{\partial r}\,\vec{u_r}$.

2) Quelle est la valeur moyenne $\langle\vec{\pi}\rangle$ du vecteur de Poynting ? En déduire la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers un cylindre d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon $r \gg \lambda$.

3) En déduire l'expression de $E(r)$ en fonction de r, $\mathcal{P}$, k, ω, h et μ_0.

4) Obtenir la relation de dispersion, en négligeant les termes en $1/(k\,r)^2$. On donne l'expression du laplacien en coordonnées cylinqriques

$$\Delta U(r) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial U}{\partial r}\right)$$

5) On se place dans la zone de champ lointain définie par $r \gg \lambda$, où $E(r)$ est réel. Donner les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et décrire la structure de l'onde dans cette zone.

O6 — 05 Pression de radiation

On envoie un faisceau laser de section S en incidence normale sur une plaque parfaitement absorbante. La longueur d'onde du laser est $\lambda = 633$ nm, sa puissance est 1 mW.

1) Rappeler la quantité de mouvement portée par un photon.

2) Quel est le nombre de photons absorbés par la plaque par unité de temps ?

3) En déduire la force F qu'exerce le faisceau laser sur la plaque. Cette force étant proportionnelle à S, on appelle « pression de radiation » la quantité F/S.

4) Le diamètre du faisceau est $d = 1$ mm. Évaluer numériquement la pression de radiation et la comparer à la pression atmosphérique. Conclure.

5) Dans l'espace, la queue des comètes est toujours à l'opposé du soleil. Interpréter ce phénomène à partir de la pression de radiation.

O6 — 06 Vecteur de Poynting d'une onde stationnaire ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

On étudie dans le vide l'onde électromagnétique suivante : $\vec{E} = E_0\,\cos(\omega\,t)\sin(k\,z)\,\vec{u_x}$.

1) Décrire cette onde. Démontrer la relation entre ω et k.

2) Calculer le champ magnétique associé à cette onde.

3) Calculer le vecteur de Poynting associé à cette onde. Calculer ensuite sa valeur moyenne et conclure.

4) Peut-on utiliser la formule en complexe pour le calcul de $\vec{B}$ et de $\langle\vec{\pi}\rangle$? Pourquoi ?

5) Vérifier que $\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}\right)$ avec $\underline{\vec{E}} = -\dfrac{E_0}{2\,\mathrm{i}}\exp\left(\mathrm{i}(\omega\,t - k\,z)\right)\vec{u_x} + \dfrac{E_0}{2\,\mathrm{i}}\exp\left(\mathrm{i}(\omega\,t + k\,z)\right)\vec{u_x}$.
Interpréter.

6) Calculer alors $\vec{B}$ et $\langle\vec{\pi}\rangle$ par la formule en complexe.

O6 — 07 Onde rayonnée par un dipôle oscillant

On étudie l'onde électromagnétique émise par un moment dipolaire oscillant centré en O dont l'expression loin de celui-ci (c'est-à-dire pour r grand devant la longueur d'onde λ ainsi que devant la taille du dipôle a, on parle respectivement de *zone de rayonnement* et d'*approximation dipolaire*) est

$$\vec{E} = \frac{\mathcal{E}\,\sin\theta}{r}\cos\left(\omega\,t - k\,r\right)\overrightarrow{u_\theta} = E(r,\,\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}$$

Les notations se réfèrent au système de coordonnées sphérique. On admet que $\omega = c\,k$ pour cette onde.

1) Obtenir le champ magnétique associé à ce champ électrique, et commenter son expression. Quelle est la structure de cette onde ?

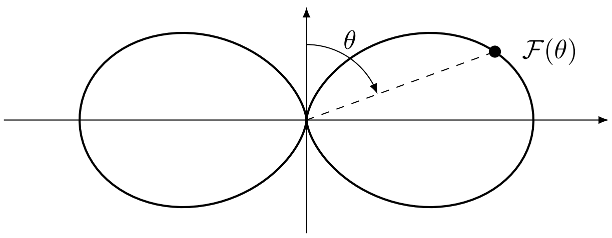
2) Calculer la valeur moyenne $\langle\vec{\pi}\rangle$ du vecteur de Poynting. En déduire la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon r.

3) Donner alors une interprétation énergétique du facteur $1/r$ dans l'amplitude du champ électrique.

Remarque. La dépendance en θ s'étudie généralement à l'aide de l'**indicatrice de rayonnement**. Il s'agit d'un graphique représentant

$$\mathcal{F}(\theta,\,\varphi) = \frac{||\vec{\pi}(r,\,\theta,\varphi)||}{||\vec{\pi}_{\max}(r)||} = \sin^2\theta$$

en fonction de θ (et en fonction de φ si elle en dépend, ce qui n'est pas le cas du rayonnement du dipôle oscillant de cet exercice). On trace ici



On rencontrera plus spécifiquement cet outil en TP.

Données. On donne le rotationnel en sphérique (simplifié pour le champ rencontré)

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,E)}{\partial r}\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

Remarque. Cet exercice décrit la propagation d'une onde à partir d'une source ponctuelle. Il est donc à mettre en parallèle de l'exercice O4-02 sur les ondes sonores sphériques.

O6 — 08 Un exemple d'onde électromagnétique

On considère l'onde magnétique suivante :

$$\vec{B} = B_0\,\exp\left(-\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\delta}\right)\right)\overrightarrow{u_y}$$

et on se demande si elle peut exister dans le vide.

1) Vérifie-t-elle l'équation de Maxwell-Flux ?

2) Quelle autre équation doit-elle vérfier ? En déduire un lien entre τ et δ.

3) Obtenir le champ électrique associé à cette onde.

4) Finalement, l'onde peut-elle formellement exister ? Est-elle plane ? progressive ? monochromatique ?

5) Commenter la réalité effective de cette onde.