O1-TD

Introduction à l'équation de d'Alembert

O1 — 01 Petits exercices indépendants

1) Vérifier que les ondes progressives $f(x - c\,t)$ et $g(x + c\,t)$ sont solutions de l'équation de d'Alembert (pour f et g quelconques).

2) On superpose deux ondes unidimensionnelles progressives harmoniques

$$f(x,\,t) = f_0\,\cos\left(\omega\,t - k\,x\right) \qquad \text{et} \qquad g(x,\,t) = g_0\,\cos\left(\omega\,t + k\,x + \varphi\right)$$

Caractériser ces deux ondes (amplitude, pulsation, longueur d'onde, sens de propagation). Écrire l'onde F résultante dans le cas où $\varphi = 0$ et $f_0 = g_0$. Caractériser cette onde. Quels sont les points où l'onde est nulle à tout instant ? Comment s'appellent ces points ?

3) On étudie une onde plane progressive harmonique $f(x,\,t) = f_0\,\cos\left(\omega\,t - k\,x\right)$. Quelle est sa fréquence ? sa pulsation ? sa période temporelle T ? sa longueur d'onde λ ? son vecteur d'onde ? Peut-on connaître a priori le lien entre λ et T ? On sait par ailleurs que cette onde vérifie l'équation de d'Alembert. Donner alors le lien entre λ et T.

4) On sait que les ondes lumineuses vérifie la relation $\lambda = c\,T$. Que peut-on en déduire sur l'équation d'onde vérifiée par les ondes lumineuses ?

5) Qu'est-ce qu'une onde progressive harmonique ? Une telle onde existe-t-elle ? Pourquoi les étudie-t-on ?

6) Montrer qu'une onde stationnaire sinusoïdale est la somme de deux ondes progressives sinusoïdales.

7) Montrer qu'une onde progressive sinusoïdale est la somme de deux ondes stationnaires sinusoïdales.

Remarque : Les questions 5 et 6 donnent les relations de passage (au sens des « matrices de changement de base ») entre la base des ondes progressives harmoniques et la base des ondes stationnaires. On remarquera que l'espace vectoriel des solutions de l'équation de d'Alembert est de dimension infinie (en maths vous n'étudiez que les espaces de dimension finie).

O1 — 02 Relation de dispersion (1)

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

On considère l'équation d'onde suivante

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \gamma\,\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}$$

1) Calculer la relation de dispersion correspondante.

2) On suppose que γ est « petit ». Préciser petit devant quoi, et obtenir k au premier ordre non nul en γ.

3) En déduire la vitesse de phase v_φ.

Remarque. On observera que v_φ dépend de k, contrairement au cas de l'équation de d'Alembert. On dit dans ce cas que l'équation d'onde est **dispersive** (cf. chapitre O5).

O1 — 03 Relation de dispersion (2)

1) Obtenir la relation de dispersion de l'équation de diffusion

$$\gamma\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

avec γ un coefficient. On suppose que ω est réèl. Quel est alors la particularité de k ?

2) On donne la relation de dispersion suivante : $\omega^2 = c^2(k^2 + k_0^2)$ avec k_0 une constante. Donner l'équation d'onde correspondante. Cette équation s'appelle l'équation de Klein-Gordon, on la retrouvera dans l'étude d'une onde électromagnétique dans un plasma (chapitre O5).

3) Quelle est la relation entre λ et T pour l'équation précédente ?