M2-TD

Changements de référentiel

M2 — 01 Petits exercices indépendants

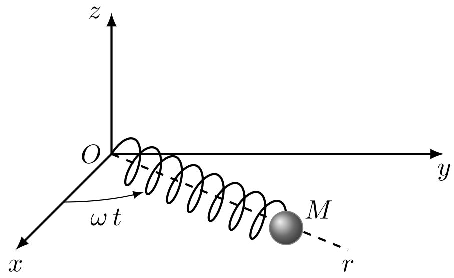
1) Un nageur plonge dans une rivière de largeur d avec l'intention de la traverser. On suppose que les eaux de celle-ci sont animées d'un courant de vitesse constante $\vec{u}$. Le nageur se déplace par rapport à l'eau à $\vec{v}$ constante, perpendiculaire aux rives. Quel est le mouvement du nageur relativement aux rives ? son point d'arrivée ? la durée de la traversée ?

2) Quelle est la période de rotation de la Terre ? Sa pulsation ? Qu'est-ce que la latitude ? Quelle est la force d'inertie d'entraîment à la latitude λ ? Vers où est-elle dirigée ? Quel est son sens ? Donner le champ de pesanteur à la latitude λ. Pour quel λ est-il le plus faible ? Pourquoi la fusée Ariane est-elle lancée depuis la Guyane ? Quelle devrait être la période de rotation de la Terre pour être en impesanteur à l'équateur ?

3) On considère un camion qui démarre avec une accélération constante $\vec{a} = a\,\vec{e}_x$ par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. Une masse m est posée dans le camion. Écrire les pseudo-forces qui s'exercent sur cette masse dans le référentiel du camion. Montrer que la force d'inertie d'entraînement s'écrit comme la dérivée par rapport à x d'une énergie potentielle.

M2 — 02 Mouvement sur un axe tournant 1

☐ ☐ ☐ ☐ ☐



On considère un point M dont on étudie le mouvement dans le référentiel galiléen $(\mathcal{R})$ rapporté au repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Ce point est mobile sans frottement le long d'une tige horizontale modélisée par un axe (Or) tel que $(\vec{u}_x, \vec{u}_r) = \omega\,t$, avec ω une constante. On note $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$ où $\vec{u}_r$ est unitaire. Ce point est soumis à une force de rappel élastique

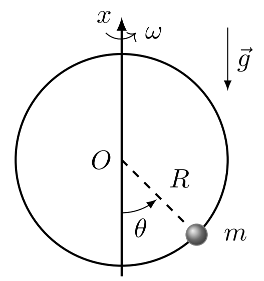
$$\vec{F} = -k\,(r - r_0)\,\vec{u}_r$$

1) Étudier les éventuelles positions d'équilibre du point M (dans le référentiel mobile lié à la tige).

2) Déterminer l'équation du mouvement relativement à la tige, puis la loi horaire $r(t)$. On remarquera que suivant la valeur de ω, le mouvement de M est oscillant ou non. On prendra comme conditions initiales $r(0) = 2\,r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$.

3) Déterminer les composantes de la réaction exercée par la tige sur M, dans le cas d'un mouvement oscillant.

M2 — 03 Équilibre et stabilité



Une masse m peut glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R. Le cerceau tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de son diamètre vertical par rapport au référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. La position de la masse est repérée par l'angle θ.

1) En utilisant le référentiel non galiléen lié au cerceau, montrer que l'équation du mouvement de la masse est

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \left(\omega^2\cos\theta - \omega_0^2\right)\sin\theta \qquad \text{avec} \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{R}$$

2) Quelles sont les positions d'équilibre θ_{eq} de la masse par rapport au cerceau ? On montrera qu'il existe jusqu'à quatre positions d'équilibre suivant le signe de $\omega - \omega_0$.

3) Pour étudier la stabilité de ces positions d'équilibre, on pose $\theta = \theta_{\mathrm{eq}} + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$. Former, pour chaque valeur de θ_{eq}, l'équation du mouvement linéarisée en ε et étudier ainsi la stabilité des différentes positions θ_{eq}.

M2 — 04 Pendule dans un train

Un pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle m suspendue à un fil de longueur ℓ ; l'autre extremité de ce fil est fixée en un point O au plafond d'un train. Ce train est animé d'un mouvement de translation rectiligne, parallèle à la direction horizontale (Ox) d'un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$, et d'accélération constante γ par rapport à $(\mathcal{R})$.

1) À partir du principe fondamental de la dynamique, déterminer l'angle α que fait le fil du pendule avec la direction verticale (Oy) lorsque le pendule est en équilibre pour un observateur placé dans le train. Retrouver ce résultat par un raisonnement énergétique.

2) L'observateur étudie les oscillations du pendule autour de cette position d'équilibre, dans le plan (Ox, Oy). La position du pendule est alors repérée par l'angle θ entre le fil et la verticale. Calculer le moment cinétique du pendule par rapport à O ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans le référentiel lié au train. En déduire la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre. On posera $\theta = \alpha + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$.

M2 — 05 Mouvement sur un axe tournant 2

On considère un anneau de masse m sur une tige. L'anneau est libre de se déplacer sur la tige. La tige tourne à vitesse angulaire $\omega = 1$ tr/s constante autour d'un axe z qui lui est orthogonal et qui passe par une de ses extrémités.

1) Décrire qualitativement l'effet des pseudo-forces dans le référentiel de la tige. Écrire ces pseudo-forces.

2) Écrire alors le principe fondamental de la dynamique et le projeter sur les 3 axes. Décrire la trajectoire de l'anneau m dans le référentiel lié à la tige ainsi que dans le référentiel galiléen.

3) L'anneau est initialement à une distance $\ell = 10$ cm de l'axe de rotation. La tige mesure $L = 1$ m. À quelle vitesse l'anneau est-il éjecté de la tige ?

M2 — 06 Une attraction de fête foraine

Un manège, appelé « rotor », est constitué d'un énorme cylindre vertical qui tourne autour de son axe. Les passagers pénètrent à l'intérieur et s'installent contre la paroi du cylindre. Le cylindre est mis en rotation, d'abord lentement puis de plus en plus vite. Quand la vitesse de rotation est suffisante, les passagers restent collés à la paroi et peuvent (par exemple) se mettre la tête en bas. (Scanner le QR code pour voir la vidéo associée.)

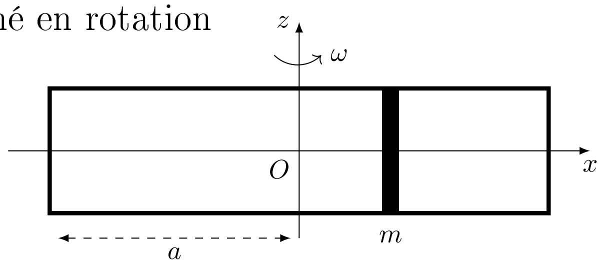
1) Expliquer pourquoi les passagers restent collés contre la paroi. Quelle est la force qui les empêche de tomber ? Est-ce sans danger ? Que ressent un passager qui essaye de décoller un bras ?

2) On appelle μ le coefficient de frottement entre la paroi et les passagers. Quand les passagers sont immobiles, les composantes tangentielles R_T et normale R_N de la réaction du support vérifie $|R_T| \leqslant \mu\,|R_N|$. Déterminer la valeur minimale de la vitesse de rotation du cylindre, en fonction du rayon du cylindre a, de g et de μ, à partir de laquelle les passagers restent collés à la paroi.

3) Application numérique : $a = 4{,}0$ m, $\mu = 0{,}4$. Calculer la vitesse minimale de rotation en tours par minute.

M2 — 07 Système thermodynamique fermé en rotation

Un tube cylindrique horizontal, de section S, de longueur $2\,a$, de température maintenue constante T, est séparé en deux compartiments par une paroi de masse m mobile sans frottement et repérée par x. Chaque compartiment contient une mole du même gaz parfait et le cylindre tourne autour de (Oz) à la vitesse angulaire constante ω.

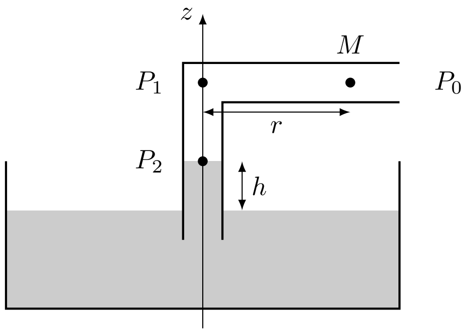


1) Déterminer les positions d'équilibre (dans le référentiel tournant) du système et leur stabilité. On introduira la pulsation critique

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2\,R\,T}{m\,a^2}}$$

M2 — 08 Dépression dans une paille

Dans le dispositif suivant, le tube coudé plonge dans un liquide de masse volumique μ_ℓ. Il tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz). La partie supérieure horizontale est de longueur R. On note P_0 la pression de l'air extérieur.



1) Le point M est repéré par son rayon r. On suppose que la masse volumique de l'air est une constante μ_a. On considère un petit volume d'air entre r et $r + \mathrm{d}r$. Traduire son équilibre mécanique et en déduire la pression $P(r)$ dans le tube.

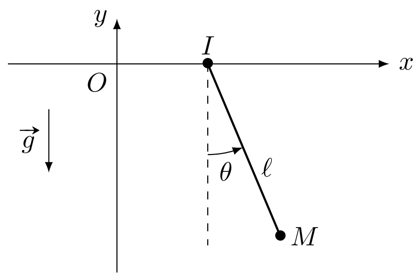
2) On suppose $P_1 \approx P_2$. Justifier cette hypothèse. En déduire la dénivellation h.

Données : $R = 10$ cm, $\omega = 300$ rad·s^{-1}, $\mu_a = 1{,}3$ kg·m^{-3} et $\mu_\ell = 10^3$ kg·m^{-3}.

M2 — 10 Pendule excité sinusoïdalement

Une masselotte M de masse m est attachée au point I par un fil sans masse de longueur ℓ. Le point I se déplace sur (Ox) selon $\overrightarrow{OI} = x\,\overrightarrow{e_x} = x_0\,\sin(\omega\,t)\,\overrightarrow{e_x}$.

On note $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et $\mathcal{R}' = (I, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ deux référentiels.



1) Que peut-on dire de $\mathcal{R}'$? Justifier.

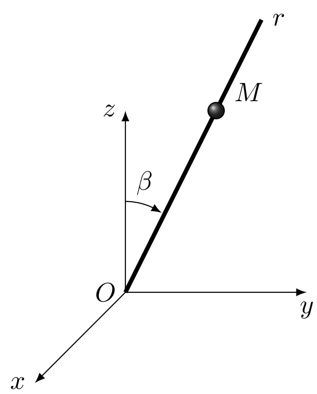
2) Quelles forces s'exercent sur M dans $\mathcal{R}'$? Les exprimer en coordonnées cylindriques.

3) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport au point I dans $\mathcal{R}'$, exprimer l'équation différentielle régissant θ, dans le cas où les angles sont petits. On pose $\omega_0^2 = g/\ell$ et $a = x_0/\ell$.

4) On donne les conditions initiales $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. Obtenir l'équation horaire $\theta(t)$.

M2 — 12 Masselotte sur une tige en rotation

On considère un point matériel M, mobile sans frottement le long d'une tige partant de O, de longueur supposée infinie, et inclinée d'un angle β par rapport à la verticale. La tige est en rotation autour de l'axe vertical (Oz), à la vitesse angulaire ω constante. On note r l'abscisse le long de la tige.



1) Étudier les positions d'équilibre du point M (dans le référentiel mobile lié à la tige).

2) En regardant le signe des forces lors d'un petit écart $\mathrm{d}r$ autour de cette position d'équilibre, déterminer si celle -ci est stable ou instable.

3) Déterminer l'équation du mouvement relativement à la tige, puis la loi horaire $r(t)$. On prendra comme conditions initiales $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$.

M2 — 11 Marées (théorie statique)

Les marées proviennent de l'attraction gravitationnelle exercée par la Lune et le Soleil. Leur existence constitue une illustration du caractère non galiléen du référentiel géocentrique.

1) Classer les référentiels terrestre, géocentrique et de Copernic du plus galiléen au moins galiléen. Indiquer une illustration du caractère non galiléen du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique.

2) On se place dans le référentiel de Copernic (qu'on assimile au référentiel héliocentrique et qu'on suppose galiléen). On suppose que la trajectoire de la Terre dans ce référentiel est circulaire. En déduire l'accélération du centre de masse de la Terre dans ce référentiel.

3) On se place dans le référentiel géocentrique non galiléen. Appliquer le théorème du centre de masse à une particule de fluide P de masse m_P d'un océan. Rassembler la force d'inertie et d'attraction gravitationnelle du Soleil dans une unique **force de marée**

$$\overrightarrow{F_S}(P) \approx -G\, M_S\, m_P\, \frac{2\, R_T}{d_{ST}^3}\, \overrightarrow{e_r}$$

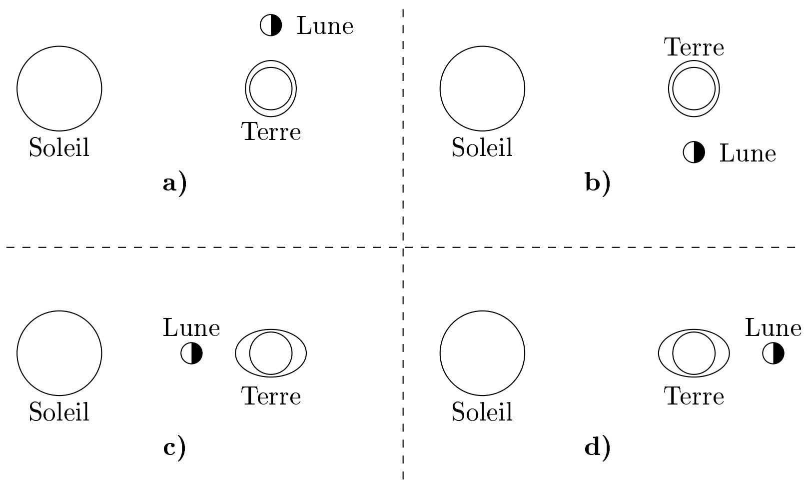
Expliquer alors les marées dues au Soleil, représentées sur le schéma ci-dessous.

Remarque : Les marées sont donc dues à l'attraction gravitationnelle **différentielle** des astres : le point P est plus attiré que le centre de masse de la Terre, et le point M l'est moins, d'où les deux lobes en P et en M. La Terre faisant une rotation sur elle-même par jour, il y a deux marées hautes et deux marées basses par jour en un endroit donné.

4) Quelle est la trajectoire de la Terre dans le référentiel sélénocentrique ? En déduire la force de marée $\overrightarrow{F_L}$ due à la Lune. Comparer en norme les forces de marée du Soleil et de la Lune. Les forces de marée de tous les autres astres du système solaire sont négligeables.

Remarque : la Lune est donc l'astre dominant dans les forces de marée. Puisqu'elle met environ 29 jours à faire une révolution autour de la Terre, on déduit que les marées en un endroit donné sont périodiques de période 29 jours. Elles se décalent donc chaque jour d'environ 50 minutes.

5) On étudie l'action conjointe de la Lune et du Soleil. Au cours du mois ont lieu des marées de mortes-eaux, et des marées de vives-eaux.

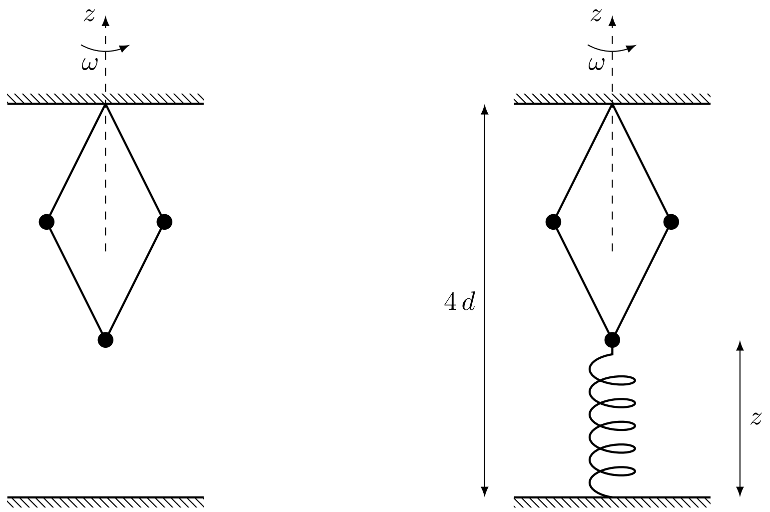


Attribuer les cas **a)**, **b)**, **c)**, et **d)** aux marées de vives ou de mortes-eaux.

Données : $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg, $M_L = 7{,}35 \times 10^{22}$ kg, $d_{ST} = 1{,}50 \times 10^{11}$ m et $d_{LT} = 3{,}84 \times 10^{8}$ m.

M2 — 09 Tachymètre

On considère le tachymètre ci-dessous. Les tiges ont une longueur d et une masse négligeable. Les trois billes ont une masse m. Le ressort a une constante de raideur k et une longueur à vide $2\,d$. Le système tourne autour de l'axe (Oz) à vitesse angulaire ω constante.



1) Déterminer les positions d'équilibre possibles du système de gauche sans ressort.

2) Déterminer les positions d'équilibre possibles du système de droite avec le ressort.

3) Montrer qu'au-delà d'une certaine vitesse de rotation, le dispositif de droite permet de mesurer ω.

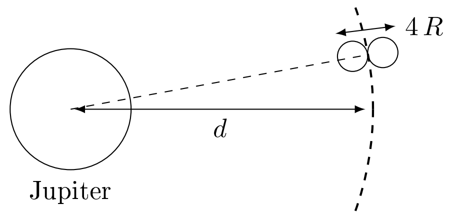
M2 — 13 Limite de Roche

On se place dans le référentiel attaché au centre de masse de Jupiter, que l'on considère galiléen. Un satellite de centre O et de masse volumique $\mu_c = 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, est en orbite circulaire autour de Jupiter (masse $M_J = 1{,}9 \times 10^{27}$ kg, rayon $R_J = 7{,}1 \times 10^4$ km) à une distance d.

1) On modélise le satellite par deux sphères de rayon R et de centre O_1 et O_2, comme indiqué sur le schéma. Obtenir l'accélération du centre de masse O du satellite puis sa vitesse angulaire ω.

2) Écrire la force qu'exercent les deux sphères l'une sur l'autre. Cette force modélise la cohésion gravitationnelle du satellite. Appliquer alors le théorème du centre de masse à une des deux sphères. On notera N la composante normale de la force de réaction entre les deux sphères.

3) À quelle condition sur d le satellite se disloque-t-il ?



La **limite de Roche** a été théorisée pour la première fois par Édouard Roche (1820-1883). À titre d'illustration, les anneaux de Saturne sont en partie constitués de débris de satellites s'étant disloqués sous l'attraction différentielle de la planète.