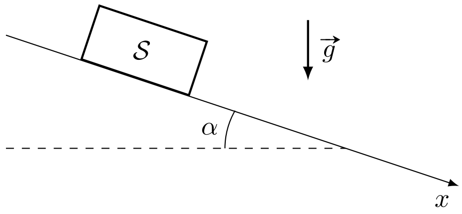
M1-TD

Révisions de mécanique

M1 — 01 Glissade sur un plan incliné

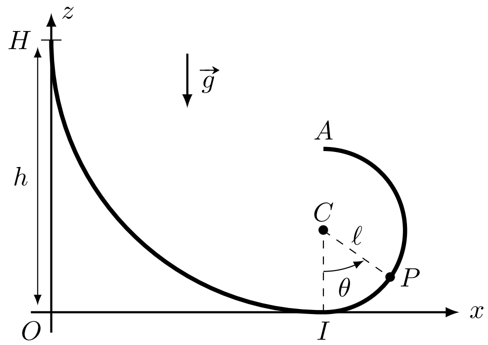


On considère un solide $\mathcal{S}$, de masse m sur un plan incliné.

1) Faire l'hypothèse de non-glissement et obtenir l'angle limite sous lequel elle est vérifiée.

2) Faire l'hypothèse de glissement et obtenir la vitesse du solide en fonction du temps. Vérifier l'hypothèse de glissement.

M1 — 02 Looping



Un mobile P assimilé à un point matériel de masse m se déplace sur un rail situé dans un plan vertical. Le rail comporte une partie IA constituée d'un demi cercle de centre C et de diamètre $IA = 2\,\ell$. On néglige tout frottement et la liaison entre le mobile et le rail est unilatéral, c'est-à-dire que la réaction $\vec{R}$ exercée par le rail sur le mobile ne peut changer de sens. La position du point P lorsque sa trajectoire est à l'intérieur du demi-cercle est repérée par l'angle θ.

1) À l'instant $t = 0$, le mobile est libérée sans vitesse initiale du point H. Exprimer en fonction de ℓ, h g et θ la norme v_P de la vitesse du point P lorsqu'il est à l'intérieur du demi-cercle.

2) Donner l'expression de la norme de la réaction $\vec{R}$ exercée par le rail sur le point P lorsqu'il est à l'intérieur du demi-cercle.

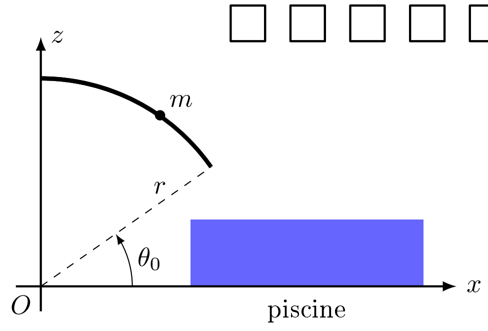
3) De quelle hauteur minimale h_m doit-on lâcher le mobile sans vitesse initiale en H pour qu'il arrive en A ?

4) Pour $h = h_m$, obtenir l'expression de la réaction R_I au point I.

5) Exprimer la norme v_A de la vitesse du mobile lorsqu'il arrive au point A après avoir été lâché sans vitesse initiale depuis la hauteur $h = h_m$.

6) On désigne par x_C l'abscisse du centre du demi-cercle. Calculer pour $h = h_m$ l'abscisse x_0 du point P lorsque la trajectoir du mobile coupe l'axe (Ox) après être passé par le point A.

M1 — 03 Toboggan aquatique



1) On considère un toboggan ayant la forme d'une portion de cercle de centre O et de rayon r. Le revêtement du toboggan rend les frottements négligeables. Un utilisateur modélisé par un point matériel de masse m se laisse glisser depuis le haut du toboggan, en partant avec une vitesse nulle. Le toboggan est conçu tel que θ_0 est l'angle pour lequel l'utilisateur décolle du toboggan. Trouver θ_0.

M1 — 04 Décollement d'un plateau vibrant

Un plateau horizontal P est animé d'un mouvement de translation verticale et sinusoïdale d'amplitude A. Un point matériel M_p de masse m est posé sur le plateau.

1) Quelle condition doit vérifier la fréquence ν du mouvement du plateau pour que le point matériel ne décolle pas ?

M1 — 05 Saut à l'élastique (Résolution de problème)

Alice pèse 50 kg. Elle saute à l'élastique depuis le pont de Ponsonnas (103 m), avec un élastique de 30 m à vide. Lors de son saut, l'élastique atteint une extension maximale de 80 m.

1) Bob pèse quant à lui 75 kg et saute après Alice. Doit-il changer d'élastique ?

M1 — 06 Particule chargée dans un champ magnétique ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

On considère une particule chargée assimilée à un point matériel. On note m sa masse et q sa charge électrique. Elle évolue dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0\,\vec{e_z}$ constant et uniforme. Sa vitesse initiale est $\vec{v}(0) = v_0\,\vec{e_x}$.

1) Établir l'équation du mouvement de la particule.

2) Montrer que sa trajectoire reste dans le plan (Oxy).

3) En posant $X = v_x + \mathrm{i}\,v_y$ et $Y = v_x - \mathrm{i}\,v_y$, découpler les deux projections (sur x et y) de l'équation du mouvement.

4) Montrer que la trajectoire est un cercle, dont on identifiera le centre ainsi que le rayon.

5) Montrer que le moment cinétique de la particule est conservé au cours du temps.

M1 — 07 Gravité

1) La station spatiale internationale met 27 minutes à faire le tour de la Terre. À quelle distance se trouve-t-elle du sol ?

2) Le record du monde de saut à la perche est détenu en juin 2019 par le français Renaud Lavillenie, qui a sauté en salle $6,16$ m en 2014. Pouvez-vous expliquer physiquement pourquoi les sauts des perchistes sont autour de 6 m (et non 10 m par exemple). Serait-il pertinent de prendre une perche la plus grande possible, 10 m par exemple ?

3) En raisonnant (très) naïvement, estimer un record probable de saut à la perche sur la Lune.

Données : rayon de la Terre $R_T = 6400$ km, rayon de la Lune $R_L = 1700$ km, masse de la Terre $M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg, masse de la Lune $M_L = 7,3 \times 10^{22}$ kg.

M1 — 08 Satellites et frottements ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Un satellite de masse m est placé sur une orbite circulaire de rayon r_0 contenue dans le plan équatorial de la Terre de masse M_T.

1) Déterminer les énergies potentielles E_{p0} cinétique E_{c0} et mécanique E_{m0}.

2) L'altitude du satellite étant peu élevée, il subit des frottements des hautes couches de l'atmosphère. Son énergie totale diminue alors avec le temps suivant

$$E_m = E_{m0}\,(1 + \alpha\,t) \qquad \text{avec} \qquad \alpha > 0 \qquad \text{et} \qquad E_{m0} < 0$$

On suppose que la trajectoire reste circulaire. Déterminer, en fonction du temps, le rayon r de la trajectoire et la vitesse v du satellite.

3) Expliquer pourquoi la vitesse du satellite augmente alors qu'il est freiné par l'atmosphère.

M1 — 09 Vibration d'une molécule

Une molécule diatomique comme HCl peut être modélisée par deux points matériels A ($\leftrightarrow$ Cl) et B ($\leftrightarrow$ H). La molécule est polaire : l'atome A porte la charge positive $q = \delta\, e$, l'atome B de charge négative $-q = -\delta\, e$, avec e la charge élémentaire et $\delta = 0,6$. L'énergie potentielle d'interaction s'écrit

$$E_p = \frac{\alpha}{r^{10}} - \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{r}$$

avec $r = AB$ et $\alpha > 0$.

1) Commenter les deux termes de l'énergie potentielle.

2) Tracer l'allure de $E_p(r)$. On notera r_0 la distance à l'équilibre. Exprimer α en fonction de r_0 et des autres données. On utilisera cette expression dans toute la suite.

3) Exprimer l'énergie de dissociation E_d de la molécule en fonction de r_0, puis la calculer.

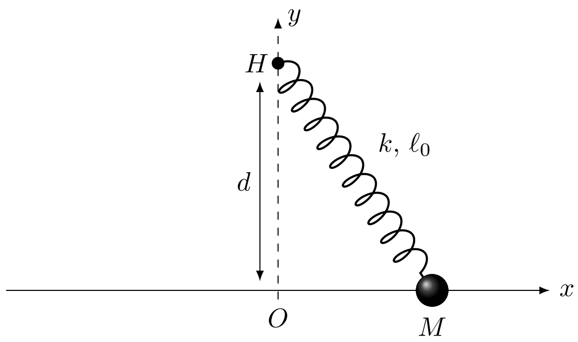
4) Écrire l'énergie mécanique de B, dans le référentiel de A. Discuter la nature du mouvement de B dans $(\mathcal{R})$ suivant le signe de E_m.

5) On considère que B oscille autour de sa position d'équilibre. Quelle est la pulsation des oscillations, dans le cas où ces dernières sont de petite amplitude ?

Données. $r_0 = 3$ Å, et $m_H = 10^{-26}$ kg.

M1 — 10 Oscillateur anharmonique

On considère un anneau de masse m, assimilé à un point matériel, astreint à se déplacer sans frottement le long d'un axe (Ox). L'une des extrémités d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 est reliée à M, l'autre étant fixée en H de coordonnées $(0,\, d)$ dans le repère $(0,\, x,\, y)$.



1) Obtenir l'équation du mouvement de l'anneau.

2) Le système est-il conservatif en énergie ? Écrire l'expression de l'énergie potentielle E_p du système.

3) En déduire les positions d'équilibre, ainsi que leur stabilité, en distinguant les deux cas $\ell_0 > d$ ou $\ell_0 < d$.

4) On se place dans le cas $d = \ell_0$, et on considère de plus que le mouvement est de faible amplitude, $x \ll \ell_0$. Montrer que l'énergie potentielle devient

$$E_p = b\,x^4$$

et expliciter b.

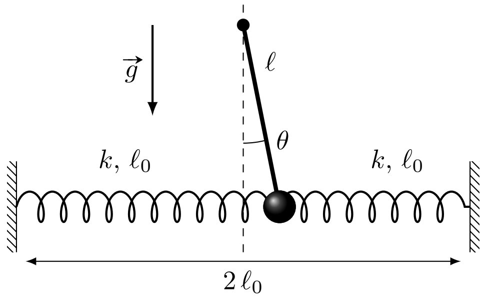
5) En déduire l'équation du mouvement, par un raisonnement énergétique. L'oscillateur est-il harmonique ?

6) Calculer dans ce cas la période de l'oscillateur. On notera x_0 l'amplitude du mouvement. Quelle est la différence frappante par rapport à un oscillateur harmonique ? On parle de **non-isochronisme** des oscillations. On donne

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} \approx 1,311$$

M1 — 11 Ressorts et pendule

Un pendule simple (point matériel M de masse m au bout d'un fil inextensible de longueur ℓ) est lié à deux ressorts identiques de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. Leurs points d'attache sont séparés de $2\,\ell_0$. L'angle θ entre le pendule et la verticale est toujours faible, si bien qu'on considérera le mouvement de M horizontal.



1) Montrer que $\theta = 0$ représente une position d'équilibre stable.

2) Obtenir l'équation du mouvement de la masse. En déduire la pulsation des petites oscillations. On introduira

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2\,k}{m}}$$

3) Retrouver l'équation du mouvement par un raisonnement énergétique.

M1 — 12 La grosse Bertha

Un canon d'artillerie tire des obus de masse m avec une vitesse initiale v_0 dans une direction faisant un angle α avec l'horizontale. On négligera les frottements de l'air.

1) Faire un bilan des forces appliquées à l'obus à partir du moment où il quitte le canon.

2) Définir un repère $(e_x,\, e_y)$ adapté. Déterminer les équations horaires de x et y de l'obus dans ce repère.

3) Déterminer l'équation de la trajectoire de l'obus sous la forme $y = f(x)$.

4) Exprimer la distance à laquelle l'obus touche le sol en fonction de α et v_0.

5) Déterminer la distance maximale d'un objectif atteignable par le canon, appelée portée L, en fonction de v_0, et l'angle α correspondant.

6) Lors de la première guerre mondiale, l'armée allemande utilisa un canon surnommé « la grosse Bertha » qui tirait des obus de 800 kg avec une vitesse initiale de 330 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Calculer la portée maximale de ce canon.

7) La portée effective était en réalité de 9300 m. Commenter la différence avec la valeur obtenue à la question précédente.

8) On souhaite maintenant prendre en compte les frottements, et pour travailler des équations dont les solutions sont analytiques, on propose une force de frottements linéaire en $\vec{v}$, qu'on écrit $\vec{f} = -m\,\vec{v}\,/\,\tau$. Que pensez-vous physiquement de ce choix ?

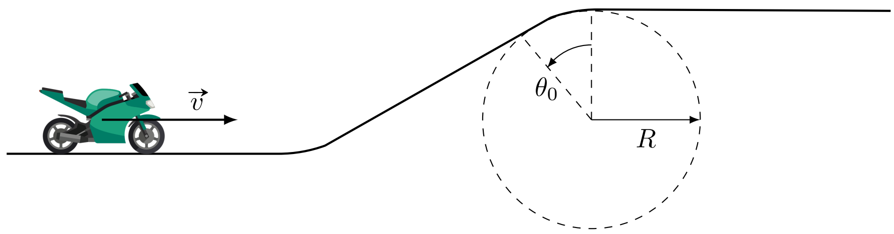
9) Montrer que la nouvelle portée L, si on tient compte de cette force, vérifie

$$g\,\tau^2 \ln\left(1 - \frac{L}{v_0\,\tau\cos\alpha}\right) + \left(\frac{v_0\sin\alpha + g\,\tau}{v_0\cos\alpha}\right) L = 0$$

Déterminer à l'aide d'un outil numérique quelconque (par exemple python) le facteur τ qui rend compte de la portée réelle, en prenant $\alpha = 45°$.

M1 — 14 Saut à moto (Résolution de problème)

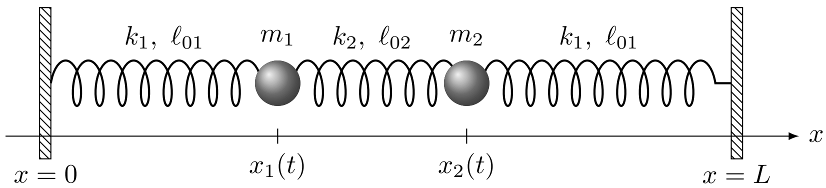
1) Quelle doit-être la vitesse de la moto pour que celle-ci décolle sur la rupture de pente représentée ci-dessous ? La rupture de pente a une forme circulaire, de rayon $R = 3$ m, entre l'angle $\theta_0 = 30°$ et la verticale.



Réponse : $v_{\max} = \sqrt{g\,R\,\cos\theta_0}$, soit $v_{\max} = 93$ km/h.

M1 — 13 Système masse/ressort

On considère le système mécanique suivant.



1) Trouver les positions d'équilibre $x_{1,\text{eq}}$ et $x_{2,\text{eq}}$ des deux masses.

2) (Facultative) Pour simplifier, on prendra dans cette question $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$ et $\ell_{01} = \ell_{02}$. Obtenir les évolutions temporelles $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sans chercher à expliciter les constantes d'intégration. Que faudrait-il préciser pour pouvoir calculer ces dernières ?

Astuce. Pour la question **2)**, on pourra poser les changements de variables $X = x_2 + x_1$ et $Y = x_2 - x_1$ et trouver les équations vérifiées par X et Y.

M1 — 18 Force en $1/r^3$

Une particule M de masse m est soumise de la part d'un centre O à une force

$$\vec{F} = \frac{m\,k}{r^3}\,\vec{e_r} \qquad \text{avec} \qquad k > 0$$

où $r = OM$ et $\vec{e_r} = \overrightarrow{OM}\,/\,OM$ le vecteur unitaire de la base sphérique.

1) Montrer que le mouvement est plan et que $C = r^2\,\dot{\theta}$ est une constante du mouvement (où θ est l'angle de la base cylindrique).

2) Exprimer l'énergie potentielle E_p associée à $\vec{F}$, en prenant E_p nulle à l'infini.

3) Montrer que M peut être étudié comme un système à un degré de liberté r soumis à une énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}$. Exprimer $E_{p,\text{eff}}$.

4) La trajectoire est-elle libre ou liée ?

5) Obtenir $r(t)$ en introduisant $r_0 = r(0)$.

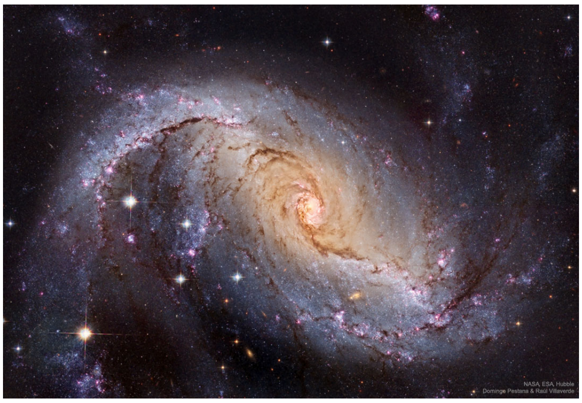
6) Comment peut-on en déduire $\theta(t)$?

7) **(Difficile)** Obtenir l'équation polaire $r(\theta)$ en introduisant les constantes d'intégration nécessaires. Tracer alors la trajectoire.

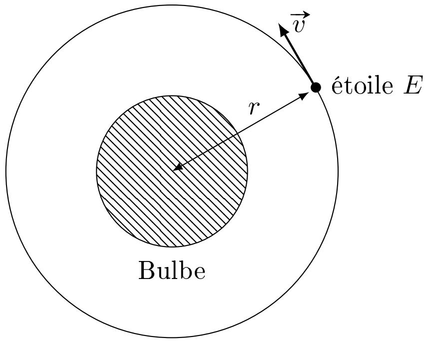
M1 — 16 Matière noire

Pour votre culture personnelle et pour contextualiser l'exercice, on pourra regarder la vidéo suivante de David Louapre `https://www.youtube.com/watch?v=M5X_Ijxm2bw`. On évoque ci-dessous la matière noire. Pour les plus intéressés qui voudraient compléter leur culture par une discussion de l'autre théorie (MoND) évoquée dans la vidéo, on pourra consulter la page wikipédia `https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_MOND`.

Une galaxie est un amas d'étoiles. On en distingue trois grands types : les galaxies elliptiques, les galaxies à spirales et les galaxies irrégulières. On s'intéresse ici à une galaxie à spirale et on modélise sa structure par un bulbe central, à symétrie sphérique, contenant l'essentiel des étoiles la composant, et par un disque en rotation dans lequel on trouve les bras spiralaires.



Galaxie spirale NGC 1672 photographiée depuis Hubble



Schéma, vu de dessus

On considère une étoile E dans un bras (non représenté sur la figure de droite), à une distance r du centre de la galaxie, et on cherche à obtenir la vitesse de l'étoile à partir de la physique « classique ». On note R le rayon du bulbe,

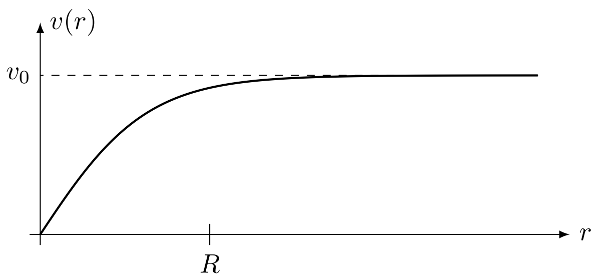
1) En considérant que toute la masse M de la galaxie est concentrée dans son bulbe, obtenir la vitesse des étoiles dans les bras (donc à l'extérieur du bulbe, $r > R$) en fonction de r. On supposera que l'étoile a une trajectoire circulaire uniforme.

2) En considérant que la masse est répartie de manière uniforme dans le bulbe, obtenir la vitesse des étoiles à l'intérieur de celui-ci ($r < R$). On supposera que les étoiles ont des trajectoires circulaires uniformes.

3) Avec ce modèle simpliste de la répartition de masse dans la galaxie, on trouve $v(r)$ à l'intérieur et à l'extérieur du bulbe. Tracer $v(r)$ pour tout r. Pour un modèle proposant une répartition plus continue, on obtiendrait le même genre de courbe, mais avec un comportement plus doux autour de R. Tracer qualitativement une telle courbe.

4) La vitesse des étoiles dans les bras peut être mesurée grâce à l'effet Doppler. Rappeler ce qu'est l'effet Doppler. Le décalage vers le rouge (ou « redshift » en anglais) concerne-t-il des étoiles qui s'éloignent ou qui se rapprochent de nous ?

5) Grâce à ces mesures, on obtient la courbe expérimentale suivante, éloignée de nos prédictions classiques.



Pour interpréter ce résultat expérimental, les cosmologues ont postulé qu'il existe de la matière non classique (dite **noire**), à repartition sphérique. Soit $M_n(r)$ la masse de matière noire dans la sphère de rayon r. Obtenir la répartition $M_n(r)$ permettant d'expliquer la courbe.

M1 — 17 Modèle de la sphère isotherme (suite de l'exercice sur la matière noire M1-16)

On ne sait pas de quoi est constituée la matière noire. On peut cependant étudier des modèles rendant compte de son comportement. Un tel modèle est celui de la *sphère isotherme*.

1) En considérant une distribution de masse à géométrie sphérique, qu'on décrit par un gaz parfait isotherme à la température T, soumis uniquement aux effets de sa gravitation, montrer que la masse volumique $\varrho(r)$ vérifie l'équation intégro-différentielle suivante

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}r} = -\frac{4\,\pi\,G\,M}{R\,T}\,\frac{\varrho(r)}{r^2}\int_0^r \varrho(u)\,u^2\,\mathrm{d}u$$

Indice : il faut partir de l'équation de la statique des fluides et écrire le champ de gravitation $\vec{g}$ proprement, et en particulier écrire explicitement (sous forme d'une intégrale) la masse à l'intérieur de la sphère de rayon r. On rappelle qu'un élément de volume en sphérique s'écrit $\mathrm{d}V = r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

2) L'équation est difficile à résoudre. Vérifier seulement que

$$\varrho(r) = \frac{k}{r^2}$$

est solution de cette équation, puis obtenir k en fonction de T notamment.

3) En étudiant précédemment la matière noire, on avait obtenu

$$M_n(r) = \frac{v_0^2\,r}{G}$$

Écrire l'équation reliant $M_n(r)$ et sa densité volumique $\varrho_n(r)$, puis en prendre la dérivée pour obtenir $\varrho_n(r)$.

4) Montrer qu'on a obtenu le même comportement pour la matière noire et pour le modèle de la sphère isotherme. Obtenir alors la température de la matière noire en fonction de la vitesse limite v_0.

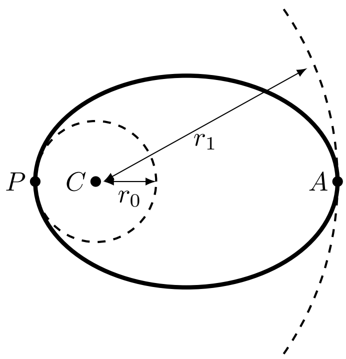
M1 — 20 Changement d'orbite - Ellipse de transfert

La Terre est supposée à symétrie sphérique, de centre C et de rayon r_0. On note g_0 l'intensité du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol. On donne $r_0 = 6400$ km et $g_0 = 9,8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1) Un satellite, de masse m, décrit une trajectoire circulaire rasante de rayon r_0. Quelles sont les expressions de la vitesse v_0 et de la période T_0 du satellite ? Calculer numériquement v_0 et T_0. Comment s'appelle v_0 ?

2) Un satellite géostationnaire décrit une trajectoire circulaire située dans le plan équatorial, et semble fixe pour un observateur terrestre. Déterminer le rayon r_1 de son orbite, ainsi que sa vitesse v_1.

3) On veut faire passer un satellite de l'orbite circulaire rasante de rayon $r_0 = CP$ à l'orbite géostationnaire de rayon $r_1 = CA$. Un moteur auxiliaire permet de modifier la vitesse du satellite aux points P et A. Le satellite parcourt alors une demi-ellipse, de dite de transfert, de périgée P et d'apogée A. Déterminer littéralement puis numériquement les vitesses v_0' et v_1' du satellite en P et en A sur sa trajectoire elliptique.



4) Calculer la durée du transfert de P à A, dite orbite de transfert d'Hohmann.

M1 — 15 Looping avec une voiture (Résolution de problème)

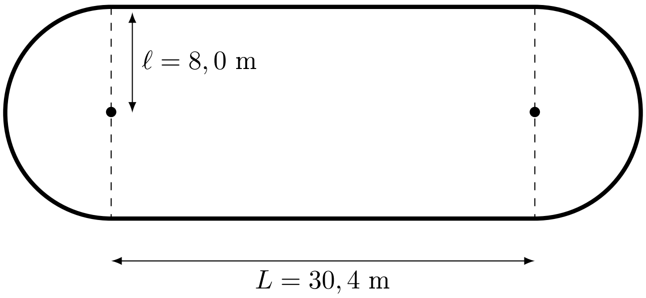
Commencez par regarder la vidéo liée au QR-code ci-contre.

1) Quelle est la vitesse minimale à l'entrée du looping nécessaire au véhicule pour en réaliser le tour complet, en fonction du rayon de celui-ci ?

Réponse : $v = \sqrt{5\,g\,R}$

M1 — 18 Patinage de vitesse (Résolution de problème)

La figure du haut représente Viktor Ahn, un patineur de vitesse sur piste courte (*short-track*) plusieurs fois médaillé olympique. Celle du bas donne les dimensions d'une piste de *short-track*.



1) Estimer à partir de la photographie la vitesse du patineur.

Données : À titre de référence, on donne les records de la discipline en juin 2019 (d'après wikipédia) :

Distance	Athlète	Nation	Temps
500 m	Wu Dajing	Chine	39 s 505
1000 m	Hwang Dae-heon	Corée du Sud	1 m 20 s 875
1500 m	Sjinkie Knegt	Pays-Bas	2 m 07 s 943
3000 m	Noh Jin-kyu	Corée du Sud	4 m 31 s 891

M1 — 19 Électron dans un champ magnétique (Résolution de problème)

1) Un électron orbite sur une trajectoire circulaire dans un champ $\vec{B}$ homogène et statique orthogonal au plan de la trajectoire. Est-il possible que le champ $\vec{B_e}$ produit au centre du cercle par l'électron soit plus fort en norme que $\vec{B}$?