L1-TD

Milieux amplificateurs de lumière

L1 — 01 Relations entre les coefficients d'Einstein

On considère une population d'atomes à deux niveaux $E_1 < E_2$. Cette population est à l'équilibre thermique avec un rayonnement de densité volumique et spectrale d'énergie $u(\nu)$.

1) Écrire les équations vérifiées par $\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}$ en fonction des coefficients d'Einstein.

2) En déduire une relation entre N_1 et N_2 en régime permanent.

3) Les atomes étant à l'équilibre thermique à la température T, un résultat de la physique statistique qu'on admet implique

$$\frac{N_1}{N_2} = \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{k_B\,T}\right)$$

où k_B est la constante de Boltzmann et T la température. On donne aussi la loi de Planck du corps noir adaptée aux notations de l'exercice

$$u(\nu) = \frac{8\,\pi\,h\,\nu^3/c^3}{\exp\left(\dfrac{h\,\nu}{k_B\,T}\right) - 1}$$

En déduire que

$$B_{12} = B_{21} \qquad \text{et} \qquad A_{21} = \frac{8\,\pi\,h\,\nu_{12}^3}{c^3}\,B_{12}$$

Remarque. Les coefficients d'Einstein ne dépendent que de l'atome considéré. Ainsi, même si notre démonstration repose sur une situation d'équilibre avec un rayonnement lui-même à l'équilibre thermique, le résultat est général : les relations obtenues entre les coefficients sont toujours valables.

L1 — 02 Prédominance de l'émission stimulée sur l'émission spontanée

On peut montrer (voir exercice L1-01) que les coefficients d'Einstein pour l'absorption B_{12}, pour l'émission stimulée B_{21} et pour l'émission spontanée A sont reliés par

$$B_{12} = B_{21} = B \qquad \text{et} \qquad A = \frac{8\,\pi\,h\,\nu_{12}^3}{c^3}\,B$$

1) On considère un rayonnement monochromatique à ν_{12}, et une population de systèmes à deux niveaux E_2 et E_1. Rappeler l'expression du nombre de photons $\mathrm{d}N^{\text{stim}}$ produits par émission stimulée pendant $\mathrm{d}t$, ainsi que le nombre de photons $\mathrm{d}N^{\text{spont}}$ produits par émission spontanée. On note $u(\nu)$ la densité spectrale d'énergie volumique du rayonnement.

2) On souhaite comparer les deux phénomènes d'émission en calculant le rapport $\mathrm{d}N^{\text{stim}}/\mathrm{d}N^{\text{spont}}$. Pour cela on considère une expérience dans laquelle le rayonnement est à l'équilibre thermique. Il vérifie alors la loi de Planck

$$u(\nu) = \frac{8\,\pi\,h\,\nu^3/c^3}{\exp\left(\dfrac{h\,\nu}{k_B\,T}\right) - 1}$$

Pour un matériau à température ordinaire $T = 290$ K, calculer la longueur d'onde minimale à partir de laquelle il y a prédominance de l'émission spontanée. On donne $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J·K^{-1} et $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J·s.

Remarque : L'émission stimulée domine ainsi seulement aux basses fréquences. Ceci explique qu'historiquement on a d'abord réalisé des MASER (laser dans le domaine micro-onde donc basse fréquence) puis seulement plus tard des laser (dans le domaine visible haute fréquence).

L1 — 03 Impossibilité de l'inversion de population à deux niveaux

On considère une population d'atomes à deux niveaux $E_2 > E_1$. Elle est en contact avec un rayonnement.

1) En prenant en compte les trois processus fondamentaux, réaliser un bilan de population des atomes dans le niveau 2.

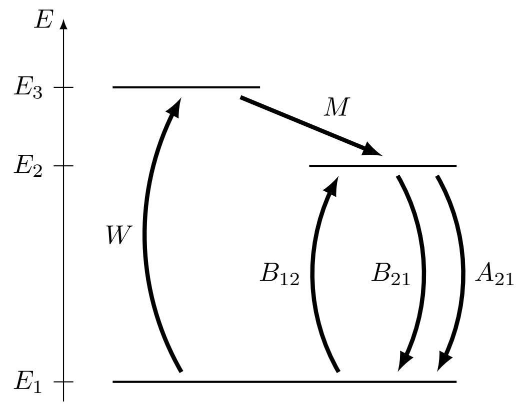
2) Établir alors l'expression du rapport N_2 / N_1 à l'équilibre.

3) On admet la relation $B_{12} = B_{21} = B$ entre les coefficients d'Einstein. En déduire qu'on a toujours $N_2 < N_1$ à l'équilibre pour les systèmes à deux niveaux. L'inversion de population est donc irréalisable et il n'est pas possible d'amplifier de la lumière avec un tel système.

L1 — 04 Inversion de population d'un laser à trois niveaux ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Dans un laser à trois niveaux, une famille d'atomes possède trois niveaux d'énergie $E_1 < E_2 < E_3$. Une pompe excite les atomes du niveau 1 au niveau 3 avec un taux W exprimé en nombre d'excitations par atome excitable et par unité de temps. Les atomes au niveau E_3 se désexcitent spontanément vers le niveau E_2, avec un taux M exprimé en nombre de désexcitations par atome excité et par unité de temps. Cette désexcitation se fait par un processus non radiatif. La population de photons d'énergie $h\,\nu_{23} = E_3 - E_2$ et $h\,\nu_{13} = E_3 - E_1$ est trop faible et trop instable pour envisager des absorptions ou des émissions stimulées entre le niveau E_3 et les autres.

Entre les niveaux E_1 et E_2, les coefficients d'Einstein sont les mêmes que pour un système à deux niveaux.



1) Établir le système d'équations différentielles entre $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$.

2) Écrire ces équations en régime permanent.

3) En déduire l'expression de $N_2 - N_1$ en fonction de N_3. On utilisera que $B_{21} = B_{12}$.

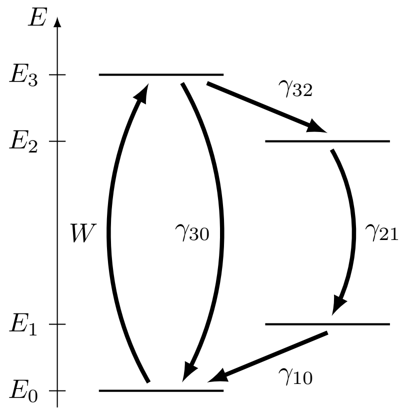
4) Obtenir alors le taux de pompage minimal $W_{\min}$ permettant de réaliser la condition d'inversion de population, en fonction des coefficients d'Einstein.

L1 — 05 Inversion de population pour un laser à quatre niveaux

On considère une famille d'atomes à quatre niveaux d'énergie $E_0 < E_1 < E_2 < E_3$. Une pompe excite les atomes du niveau 0 au niveau 3 avec un taux W. On considère également tous les processus figurant sur le schéma, avec

- $\gamma_{32} \gg \gamma_{30}$ et $\gamma_{32} \gg W$;
- $\gamma_{10} \gg \gamma_{21}$.

Tous les taux γ sont exprimés par atome excitable et par unité de temps.



1) Établir le système d'équations différentielles entre $N_0(t)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$ puis les écrire en régime permanent.

2) En déduire N_1, N_2 et N_3 en fonction de N_0 en utilisant les comparaisons entre taux.

3) En déduire l'expression de $N_2 - N_1$ en fonction de $N_{\text{tot}} = N_0 + N_1 + N_2 + N_3$.

4) Y a-t-il un taux de pompage minimal $W_{\min}$ permettant de réaliser la condition d'inversion de population ? Comparer au système à trois niveaux (TD L1-04).