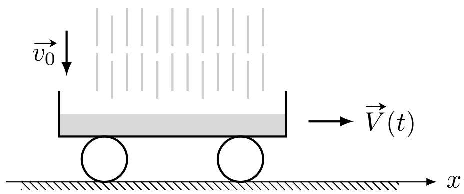
H4-TD Bilans macroscopiques

- Calculs de forces : 01, 02, 04 ;
- Déterminations de trajectoires : 03, 07 ;
- Calculs de puissances : 02, 06, 10 ;
- Études de comportements de fluides : 05, 08, 09, 11.

H4 — 07 Chariot sous la pluie

Un chariot roule sous la pluie. On note M_0 sa masse à vide, et $\vec{V}(t)$ sa vitesse. Les gouttes de pluie tombent à la vitesse $\vec{v_0}$ verticale, de telle sorte que le débit massique d'eau remplissant le chariot est D_m.

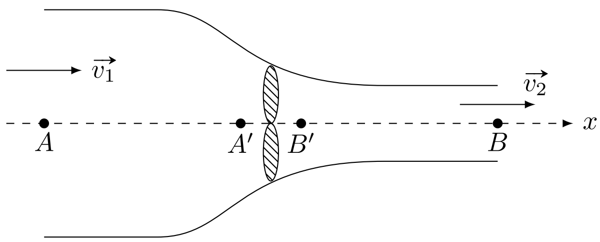


1) Obtenir l'équation du mouvement du chariot, en négligeant tous les frottements.

2) Résoudre cette équation et discuter la trajectoire.

H4 — 02 Hélice d'avion

Une hélice est plongée dans un fluide incompressible homogène parfait de masse volumique ϱ, animé d'un mouvement permanent et irrotationnel. L'hélice est supposée plane et le système étudié est un tube de courant ayant une symétrie de révolution autour de l'axe (Ox). On néglige la pesanteur. À l'extérieur de ce tube de courant, le fluide n'est pas affecté par l'hélice et $P = P_0$. Toutes les grandeurs sont prises uniformes sur une section droite. En amont, loin de l'hélice (point A), on a $P = P_0$ et $\vec{v} = \vec{v_1}$. En aval, loin de l'hélice (point B), on a $P = P_0$ et $\vec{v} = \vec{v_2}$. Au voisinage de l'hélice, la vitesse est $\vec{v}$ et la section S.



1) Que peut-on dire du débit volumique ?

2) Peut-on écrire le théorème de Bernoulli entre A et B ? Calculer $P_{B'} - P_{A'}$ en fonction de ϱ, v_1 et v_2.

3) Obtenir l'expression de $\vec{F}$ la force exercée par l'hélice sur le fluide en fonction de ϱ, v_1, v_2 et du débit volumique D_V.

4) Effectuer un bilan d'énergie cinétique pour obtenir la puissance $\mathcal{P}$ fournie par l'hélice au fluide.

5) Donner une relation entre $\vec{F}$, $\mathcal{P}$ et $\vec{v}$. En déduire une équation liant v, v_1 et v_2.

6) Dans le cas où $v_2 \gg v_1$, donner l'expression de $\mathcal{P}$ en fonction de v_2, ϱ, S et D_V.

Commentaires : un exercice sur une éolienne serait très similaire, on s'intéresserait à la puissance fournie par le fluide à l'hélice de l'éolienne.

H4 — 03 Goutte de pluie

À $t = 0$, une goutte d'eau sphérique de rayon r_0, animée d'une vitesse v_0 tombe dans un nuage. L'humidité du milieu fait croître le rayon $r(t)$ de la goutte lors de la chute. La croissance du rayon est modélisée par la fonction $r(t) = r_0\,(1 + a\,t)$ avec $a > 0$ (qui traduit en fait que son volume, donc l'eau gagnée, augmente proportionnellement à sa surface : $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t \propto S$). La masse volumique de l'eau est notée μ et la masse de la goutte $m(t)$.

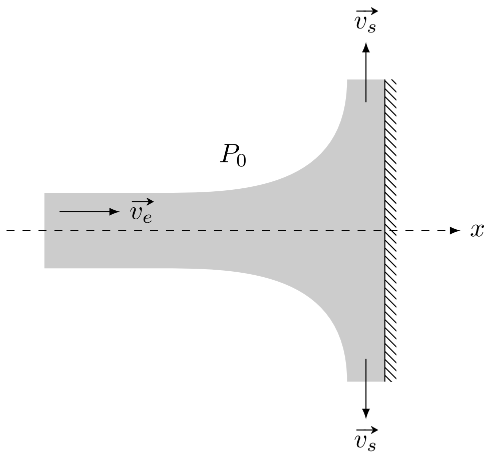
1) Déterminer l'expression de $\mathrm{d}m\,/\,\mathrm{d}t$ en fonction de μ, a et r_0 notamment.

2) Déterminer en fonction de $v(t)$ l'équation du mouvement de la goutte.

3) Obtenir l'expression de $v(t)$ et tracer cette fonction. On supposera pour cette question $v_0 = 0$.

H4 — 04 Force sur une plaque

Un jet d'eau, de section circulaire S, arrive en incidence normale sur une plaque plane verticale fixe. Le jet change de géométrie à l'impact de la plaque. Il possède alors une symétrie de révolution autour de l'axe x. L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible et homogène de masse volumique ρ. On néglige les effets de la pesanteur. Le champ de vitesse dans le jet loin avant l'impact est $\vec{v} = v_e\,\vec{e_x}$. La pression ambiante est notée P_0. Le champ de vitesse loin après l'impact est $\vec{v} = v_s\,\vec{e_r}$.



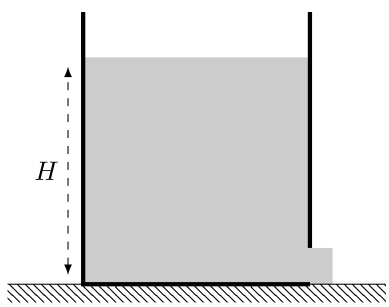
1) Calculer, par un bilan de quantité de mouvement, la force exercée par le fluide sur la plaque.

Indice : il faudra se servir du fait que, si P_0 est une constante,

$$-\oiint_{\mathcal{S}} P_0\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{0}.$$

H4 — 01 Force due à une fuite

Un fluide parfait incompressible homogène est contenu dans un récipient. En bas de ce récipient il y a un trou par lequel le fluide fuit. La section du trou est très petite devant celle du récipient, si bien qu'on peut considérer que la hauteur de fluide H ne varie pas. Le régime est alors stationnaire.

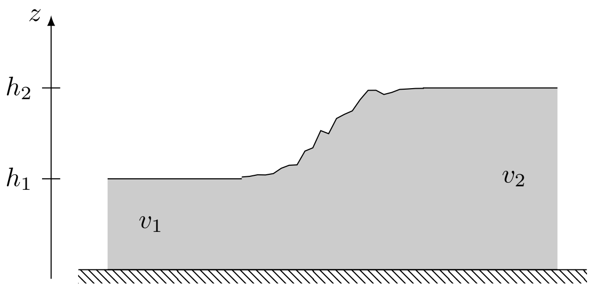


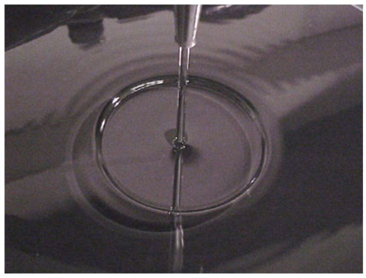
1) Déterminer la vitesse du fluide au niveau de la fuite.

2) En déduire la force que le fluide exerce sur le récipient, en négligeant les frottements sur le sol. Dans quel sens se déplace alors le récipient ?

H4 — 05 Ressaut hydraulique

On peut facilement observer un ressaut hydraulique chez soi : c'est le bourrelet qui se forme autour du point d'impact de l'eau au fond d'un évier (voir photo). À travers ce ressaut l'eau passe d'un écoulement rapide et de faible profondeur, à un écoulement plus lent et de profondeur plus importante. Ce phénomène s'observe également souvent dans les canaux qui traversent les villes, après un déversoir. On propose dans cet exercice d'obtenir la hauteur h_2 et la vitesse v_2 en aval du ressaut, connaissant h_1 et v_1 en amont. On suppose que l'eau est un fluide parfait incompressible homogène. On note le débit massique D_m. Le régime est permanent.





1) Quel argument permet d'affirmer que la zone de faible profondeur h_1 est aussi la zone de plus grande vitesse ? Traduire quantitativement cet argument.

Au niveau du ressaut l'écoulement est complexe et les effets de la viscosité ne peuvent pas être négligés. Il est par conséquent impossible d'appliquer le théorème de Bernoulli directement entre l'entrée et la sortie. On raisonne donc par un bilan de quantité de mouvement.

2) Proposer un système fermé qui englobe le ressaut et calculer la variation de sa quantité de mouvement entre des instants t et $t + \mathrm{d}t$.

3) Calculer la résultante des forces de pression sur les surfaces amont et aval du système.

4) En déduire une équation liant h_1, v_1, h_2 et v_2.

5) En considérant connues la vitesse v_1 et la hauteur h_1 en amont, obtenir h_2 et v_2.

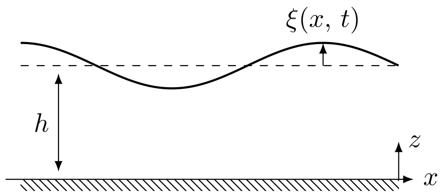
Remarques : On a en fait deux solutions possibles, l'une avec $h_2 > h_1$ qu'on retiendra, et l'autre avec $h_2 < h_1$. Mathématiquement, un ressaut « à l'envers » semble donc possible. On pourrait montrer par un argument énergétique que ce n'est pas le cas.

Figure : un ressaut hydraulique sur la Reyssouze à Bourg-en-Bresse (voyez-vous où ?) : l'écoulement en amont est fluvial, il devient torrentiel au passage de l'obstacle puis redevient fluvial par un ressaut hydraulique. Absolument superbe.

Remarque. Un écoulement fluvial est un écoulement à basse vitesse v et grande profondeur h (nombre de Froude $\mathcal{F} = v \,/\, \sqrt{g\,h} \ll 1$). Un écoulement torrentiel est un écoulement de forte vitesse et faible profondeur ($\mathcal{F} \gg 1$).

H4 — 09 Ondes de surface dans un bassin - Vagues

On étudie la propagation d'ondes unidimensionnelles de faible amplitude dans un bassin de longueur infinie selon Ox et de largeur L selon Oy, dont le fond est confondu avec le plan $z = 0$. Au repos, la surface libre est horizontale à la cote $z = h$; en présence de l'onde elle vaut $h + \xi(x, t)$, avec $\xi \ll h$. Le champ des vitesse s'écrit $\vec{v} = v(x, t)\overrightarrow{u_x}$, et l'écoulement est supposé parfait, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$. Les grandeurs $v(x, t)$ et $\xi(x, t)$ sont des infiniment petits d'ordre 1.



1) En faisant un bilan de masse sur le système ouvert et fixe constitué du volume compris entre les abcisses x et $x + \mathrm{d}x$, établir la relation :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -h\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

2) Établir l'expression de la pression $p(x, z, t)$ dans le bassin en fonction de $\xi(x, t)$, z, h, P_0 la pression atmosphérique, ϱ la masse volumique de l'eau et g.

3) En déduire, par un bilan de quantité de mouvement dans lequel on négligera tous les termes d'ordre supérieur à 1, la relation :

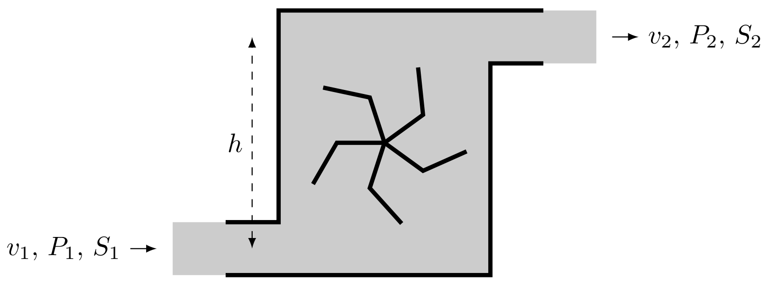
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\,\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

4) En déduire l'équation de propagation dont sont solution $v(x, t)$ et $\xi(x, t)$; ainsi que la célérité c des ondes correspondante.

5) Quelle est la fréquence du mode fondamental d'une baignoire de longueur $L = 1,7$ m pour une hauteur d'eau $h = 0,5$ m ?

H4 — 06 Puissance d'une pompe

Un fluide parfait incompressible homogène de masse volumique ρ circule dans une canalisation de section S_1. Il arrive à l'entrée d'une pompe qui permet d'amener le fluide dans une canalisation de section S_2 située à une hauteur h au dessus de la canalisation d'entrée. Loin en amont de la pompe la pression est P_1, et loin en aval elle vaut P_2. Le débit massique de l'écoulement est D_m. Le régime est permanent.

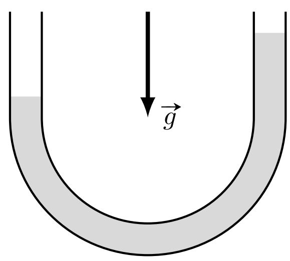


1) Effectuer un bilan d'énergie **mécanique** et en déduire la puissance développée par la pompe.

2) Le fluide est de l'eau. Application numérique avec $D_m = 100$ kg·s^{-1}, $P_2 = P_1$, $S_2 = 2,0$ dm^2, $S_1 = 3,1$ dm^2, et $h = 12,5$ m.

H4 — 11 Tube en U

On considère un fluide parfait de masse volumique μ supposée constante. Ce fluide est contenu dans le tube en U ci-contre, de section S constante. Au repos, sa surface libre définit l'origine de l'axe vertical ascendant z. À un instant initial, on pousse avec un piston le fluide dans le bras de gauche vers le bas, puis on retire le piston. On note m la masse totale de fluide.



1) Qualitativement, quelle est l'évolution du fluide ?

2) Obtenir la période des oscillations en effectuant un bilan d'**énergie mécanique**.

H4 — 08 Onde de ressaut - Mascaret

On considère un canal à fond horizontal, de largeur L constante, dans lequel de l'eau s'écoule sur une hauteur h uniforme. Le champ de vitesses dans le référentiel terrestre est initialement horizontal et uniforme, $\vec{v} = v\,\vec{u_x}$, avec $v > 0$. À un instant donné, on bloque brutalement le flux d'eau par un mur. Il se forme alors un bourrelet d'eau de hauteur $h' > h$, appelé ressaut hydraulique, qui remonte le canal à vitesse constante $-w\,\vec{u_x}$ ($w > 0$). Ce bourrelet, très turbulent dans la réalité, sera modélisé dans la suite par une simple discontinuité de hauteur qui constitue une onde de choc. Cela signifie que son abscisse x, appelée front d'onde, est un lieu de discontinuité pour les champs dans l'eau. On appelle cette vague un mascaret.

En particulier, dans le référentiel terrestre, la vitesse à gauche du front d'onde est encore $v\,\vec{u_x}$, tandis qu'à sa droite, elle est devenue nulle à cause du mur. Pour simplifier, on ne s'intéresse pas aux détails des mouvements de l'eau au niveau du front d'onde : cela justifie que l'on garde un modèle unidimensionnel de champ de vitesse. On note $-g\,\vec{u_z}$ le champ de pesanteur, ϱ la masse volumique de l'eau et P_0 la pression de l'air ambiant. L'origine des altitudes est prise au fond du canal. Le but est de déterminer la norme w de la vitesse de propagation de l'onde de choc.

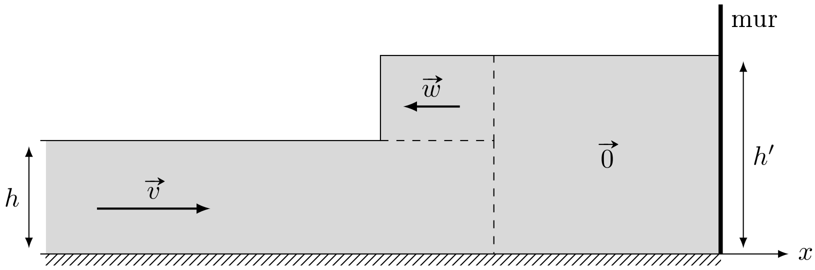
1) Expliquer pourquoi il est plus facile de raisonner dans le référentiel se déplaçant en translation à la vitesse du front d'onde.

2) On se place dans ce référentiel. Effectuer un bilan de masse pour déduire une relation entre v, w, h et h'.

3) Toujours dans le même référentiel, effectuer cette fois un bilan de quantité de mouvement et obtenir une deuxième relation entre v, w, h et h'.

4) On ne peut pas calculer analytiquement h' et w en fonction de v et h. Déduire seulement h' en fonction de v et h dans le cas où $w = 2\,v$.

5) Calculer aussi w en fonction de h et h'.



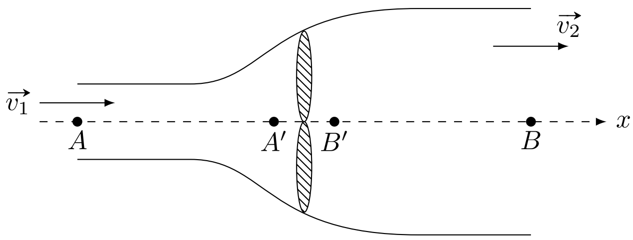
Remarque : En France, les mascarets de la Gironde attirent régulièrement des surfeurs. La vague avance à une vitesse comprise entre 10 km/h et 20 km/h. C'est un exemple de « soliton » (une onde réelle qui se propage sans se déformer sur de très grandes distances) qui a lieu à chaque marée montante (soit deux fois par jour). Une cinquantaine de mascarets par an sont particulièrement remarquables sur ce fleuve.

H4 — 10 Rendement d'une éolienne – Limite de Betz

(Il est préférable d'avoir travaillé l'exercice H4-02 sur l'hélice avant d'aborder le présent exercice.)

Le début de cet exercice est en tout point similaire à H4-02.

Une éolienne est plongée dans un fluide incompressible homogène parfait de masse volumique ϱ, animé d'un mouvement permanent et irrotationnel. L'hélice de l'éolienne est supposée plane et le système étudié est un tube de courant ayant une symétrie de révolution autour de l'axe (Ox). On néglige la pesanteur. À l'extérieur de ce tube de courant, le fluide n'est pas affecté par l'éolienne et $P = P_0$. Toutes les grandeurs sont prises uniformes sur une section droite de l'écoulement. En amont, loin de l'éolienne (point A), on a $P = P_0$ et $\vec{v} = \vec{v_1}$. En aval, loin de l'hélice (point B), on a $P = P_0$ et $\vec{v} = \vec{v_2}$. Au voisinage de l'éolienne, la vitesse est $\vec{v}$ et la section S.



Tube de courant en présence de l'éolienne

1) Que peut-on dire du débit volumique ?

2) Peut-on écrire le théorème de Bernoulli entre A et B ? Calculer $P_{B'} - P_{A'}$ en fonction de ϱ, v_1 et v_2.

3) Obtenir l'expression de $\vec{F}$ la force exercée par l'hélice sur le fluide en fonction de ϱ, v_1, v_2 et du débit volumique D_V.

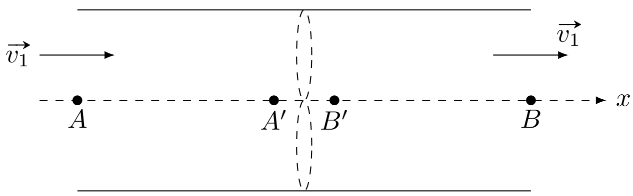
4) Effectuer un bilan d'énergie cinétique pour obtenir la puissance $\mathcal{P}$ fournie par l'hélice au fluide.

5) Donner une relation entre $\vec{F}$, $\mathcal{P}$ et $\vec{v}$. En déduire une équation liant v, v_1 et v_2.

6) Montrer qu'alors la puissance fournie par le fluide à l'éolienne est

$$\mathcal{P} = \frac{\varrho}{4}\, S\,(v_1 + v_2)(v_1^2 - v_2^2)$$

7) On suppose dans cette question que l'éolienne est absente. Le tube de courant que nous avons considéré jusque là est donc maintenant cylindrique de section S, et le vent est à la vitesse v_1. Exprimer la puissance cinétique incidente, c'est-à-dire le débit d'énergie cinétique $\mathcal{P}_C$, de l'air à travers la section S, en fonction de ϱ, v_1 et S.



Tube de courant en l'absence d'éolienne

8) On pose $x = v_2 \,/\, v_1$, et on définit le rendement r de l'éolienne comme le rapport de l'énergie transmise à l'hélice de l'éolienne sur l'énergie cinétique de l'air $r = \mathcal{P} \,/\, \mathcal{P}_C$. Exprimer r, et le tracer en fonction de x.

9) Quel est le rendement maximal de l'éolienne ? On appelle ce rapport la **limite de Betz**. L'évaluer numériquement.

Nous avons fait des hypothèses simplificatrices dans cet exercice (notamment en négligeant toute dissipation, lorsqu'on a considéré le fluide parfait). Ainsi la limite de Betz est le rendement **théorique** maximum, mais il n'est jamais atteint en pratique. Cependant la courbe $r(x)$ est assez plate autour de ce maximum, ce qui nous laisse penser qu'en pratique le rendement maximum ne doit pas être très éloigné de la limite de Betz.