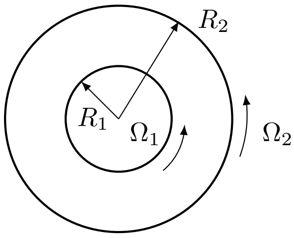
H2-TD

Dynamique des fluides visqueux newtoniens en écoulement incompressible

H2 — 01 Écoulement de Couette cylindrique

On considère deux cylindres coaxiaux d'axe (Oz) et de rayons R_1 et R_2, en rotation uniforme aux vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2. L'espace entre les cylindres est rempli par un fluide incompressible de masse volumique ϱ et de viscosité η, en écoulement stationnaire tel que $\vec{v} = v(r)\,\vec{e_\theta}$. On néglige les effets de la gravité.



1) Montrer que $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = -\dfrac{v^2}{r}\,\vec{e_r}$.

2) Montrer que la pression P ne dépend que de r.

3) Montrer que $v(r) = A\,r + \dfrac{B}{r}$ et établir les expressions de A et B.

4) Calculer $P(r)$ à une constante d'intégration près.

Données : On donne $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,v^2$. Par ailleurs, dans le cadre de l'exercice on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r\,v(r))}{\mathrm{d}r}\,\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \Delta\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r\,v(r))}{\mathrm{d}r}\right)\vec{e_\theta}$$

H2 — 02 Écoulement de Poiseuille cylindrique

On considère un fluide incompressible de viscosité dynamique η et de masse volumique ϱ en écoulement stationnaire dans un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R. On cherche un champ de vitesse et un champ de pression de la forme :

$$\vec{v} = v(r,\,z)\,\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad P = P(r,\,z)$$

1) Montrer que v ne dépend pas de z.

2) On néglige la pesanteur. Dans un tel cas, on rappelle l'équation de Navier-Stokes :

$$\varrho\,\vec{a} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \eta\,\Delta\vec{v}$$

Montrer que $\vec{a} = \vec{0}$.

3) Montrer que P ne dépend pas de r. En déduire que $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = C$ avec C une constante.

4) On note $P(z=0) = P_1$ et $P(z=L) = P_2$. Expliciter $P(z)$ puis $v(r)$.

5) En déduire l'expression du débit volumique D_V en fonction de P_1 et P_2.

6) Construire une analogie avec d'autres domaines de la physique pour obtenir une « résistance hydraulique » R_h. Exprimer R_h en fonction de η, R et L.

Données : Pour un tel champ de vitesse on a

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \Delta\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial v}{\partial r}\right)\vec{e_z}$$

H2 — 03 Vaisseau sanguin

(Cet exercice est une application des résultats de l'exercice H2-02.)

1) Le modèle d'écoulement de Poiseuille s'applique bien à l'écoulement du sang dans les vaisseaux sanguins. Calculer la chute de pression dans une artère de longueur $L = 1$ m, de rayon $R = 0,5$ cm, où le débit volumique vaut $D_V = 80\ \text{cm}^3\cdot\text{s}^{-1}$. La viscosité du sang est $\eta = 4\times10^{-3}$ Pl.

2) Cette artère a un défaut, elle est dilatée sur une longueur ℓ, de telle sorte que son rayon sur cette longueur est $R\,(1+\varepsilon)$. Calculer la différence de pression entre le début et la fin de la zone dilatée.

H2 — 04 Huile de graissage

(Cet exercice est une application des résultats de l'exercice H2-02.)

Une huile de graissage a une viscosité cinématique ν définie par $\nu = \eta/\varrho$, avec η la viscosité dynamique et $\varrho = 0,9\times10^3\ \text{kg}\cdot m^{-3}$ la masse volumique. On a $\nu = 16\times10^{-6}$ SI. Cette huile passe dans un tube de diamètre $d = 10$ mm à la vitesse moyenne de $0,4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1) Quelle est l'unité de ν ? Comment est définie la vitesse moyenne ?

2) Quel est le nombre de Reynolds ? Caractériser l'écoulement.

3) Quelle est la perte de pression par mètre de conduite ?

4) Quel est le débit volumique dans la conduite ?

5) Cette même huile s'écoule le long d'un tuyau de longueur 3 m et de diamètre 10 mm. Elle doit arriver à l'extremité du circuit avec à une vitesse de $1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Répondre aux mêmes questions que précédemment.

H2 — 05 Écoulement le long d'un plan incliné ☐☐☐☐☐

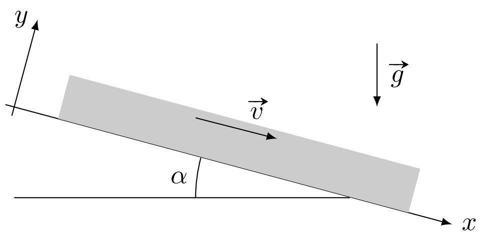
Une mince couche d'huile (viscosité $\eta = 1$ Pl, masse volumique $\varrho = 0,9\times10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$), d'épaisseur e, coule le long d'un plan incliné. Le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v(y)\,\vec{e_x}$. La pression de l'atmosphère est P_0. On néglige les forces de viscosité sur l'interface air/huile.

1) Déterminer la forme de la fonction $v(y)$.

2) Déterminer, pour une largeur L selon z, la relation entre e et le débit massique D_m.

3) Calculer la vitesse maximale et le nombre de Reynolds pour $e = 1$ mm et $\alpha = 45°$.

4) Peut-on appliquer ce modèle à une couche d'eau de même épaisseur ?



Donnée : on utilisera comme condition aux limites sur la surface libre

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \qquad \text{en} \qquad y = e$$

(absence de contrainte de viscosité sur l'air).

H2 — 06 Viscosité d'un fluide

Un récipient cylindrique vertical, de diamètre $D = 5$ cm, est terminé par un tube horizontal de diamètre $d = 1$ mm et de longueur $L = 40$ cm. Un liquide visqueux et incompressible s'écoule lentement. Sa hauteur h passe de $5,0$ cm à $2,5$ cm en une heure et quart. On admet que le débit dans le tube suit la loi de Poiseuille

$$D_v = \frac{\pi\,d^4}{128\,\eta}\,\frac{\Delta P}{L}$$

où ΔP est la différence de pression entre les deux extrémités du tube.

1) Déterminer la viscosité cinématique ν du liquide.

H2 — 07 Écoulement entre deux plans verticaux

On étudie l'écoulement d'un fluide visqueux (viscosité η, masse volumique $\mu =$ cste) entre deux plans infinis suivant y, de hauteur L, et distants de h. Le fluide s'écoule de manière stationnaire. On recherche les champs de vitesse et de pression dans le fluide sous la forme

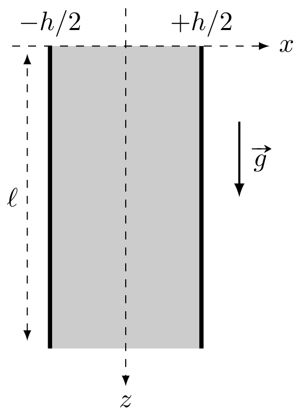
$$\vec{v} = v(x,\, z)\, \vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad P(x,\, z)$$

1) Justifier que l'écoulement est incompressible. En déduire une information sur le champ de vitesse. On peut alors utiliser l'équation de Navier-Stokes

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right) = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P + \eta\,\Delta\vec{v} + \overrightarrow{f_{\mathrm{ext}}}$$

2) En déduire une information sur le champ de pression.

3) On suppose que la pression est identique en $z = 0$ et $z = \ell$, égale à P_0. En déduire le champ de pression puis le champ de vitesse de l'écoulement.



H2 — 08 Mise en oscillation d'un fluide visqueux

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

On considère un « très grand » récipient, contenant un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η. La verticale est repérée par un axe z ascendant. On place un plateau solide de surface S (suffisament grande pour pouvoir négliger les effets de bord) dans le plan $z = 0$. Un dispositif impose au plateau d'effectuer des oscillations horizontales : son mouvement est donc $x(t) = x_0 \cos(\omega\, t)$.

1) On s'intéresse au champ des vitesses $\vec{v}(\vec{r},\, t)$ dans le fluide. Pourquoi est-il raisonnable de supposer qu'il ne dépend que de z et de t ? Déduire que $v_z = 0$.

2) Justifier que $\vec{v} = v(z,\, t)\, \vec{e_x}$.

3) Déterminer le champ de pression à une constante près.

4) Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v(z,\, t)$.

5) La résoudre en cherchant la solution sous forme complexe $\underline{v}(z,\, t) = \underline{V}(z)\, \exp(\mathrm{i}\,\omega\, t)$. Expliquer l'analogie avec l'effet de peau dans un conducteur en électromagnétisme `[Nécessite le chapitre 08]`.

6) Calculer la puissance fournie par le dispositif à la plaque.

Données : On rappelle l'équation de Navier-Stokes $\quad \rho\,\vec{a} = \rho\,\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P + \eta\,\Delta\vec{v}$

Encyclopédie des frottements fluides

À bas Reynolds ($\mathcal{R}_e \ll 10$), le coefficient de trainée $\mathcal{C}_x(\mathcal{R}_e)$ a un comportement en $1/\mathcal{R}_e$, ce qui traduit une force de trainée $\vec{F}$ proportionnelle à la vitesse v de l'objet par rapport au fluide.

$$||\vec{F}|| = \frac{1}{2}\mathcal{C}_x\,\varrho\,S\,v^2 \qquad \text{donne} \qquad ||\vec{F}|| \propto v \qquad \text{si} \qquad \mathcal{C}_x(\mathcal{R}_e) \propto \frac{1}{\mathcal{R}_e}$$

H2 — 09 Chute dans le champ de pesanteur terrestre

On étudie dans cet exercice la chute d'une bille sphérique dans un fluide visqueux (huile, viscosité $\eta = 1$ Pl, masse volumique $\varrho = 1,0 \times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) sous l'effet de la pesanteur. Dans ce cas, si on définit le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$ de l'écoulement autour de la bille en considérant comme longueur typique le diamètre D de celle-ci, et comme vitesse typique de l'écoulement celle de la bille $\vec{v}$, on peut montrer que le coefficient de trainée s'écrit exactement

$$\mathcal{C}_x = \frac{24}{\mathcal{R}_e} \qquad \text{pour} \qquad \mathcal{R}_e < 10$$

1) Définir le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$ de l'écoulement et le calculer pour $D = 2$ mm et $v = 1\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

2) En déduire que la force de trainée s'écrit

$$\vec{F} = -\,6\,\pi\,\eta\,R\,\vec{v} \qquad \text{(appelée loi de Stokes)}$$

où R est le rayon de la sphère.

3) La bille est soumise à son poids (masse m), aux frottements fluides $\vec{F}$ et à la poussée d'Archimède. Elle est lachée dans l'huile sans vitesse initiale et démarre une trajectoire le long de l'axe vertical z orienté vers le bas. Obtenir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de la bille.

4) En déduire la vitesse limite de la bille, ainsi que le temps typique τ d'évolution vers cette vitesse. On donne $\varrho_f = 7,8 \times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ pour le fer. Faire les applications numériques pour une bille en fer de rayon $r = 1$ mm.

5) En déduire un protocole pour obtenir la viscosité d'un fluide. Ce dispositif est régulièrement employé et porte le nom de « viscosimètre à bille ».

6) Résoudre explicitement l'équation différentielle pour déduire la vitesse de la bille en fonction du temps. En tracer une représentation graphique.

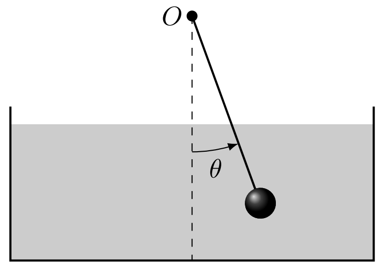
H2 — 10 Pendule dans un fluide visqueux

Une sphère de masse m et de rayon r est attachée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ, dont l'autre extrémité est reliée à un point d'attache O fixe. Elle peut osciller dans un milieu liquide de viscosité η et subit alors une force de frottement fluide $\vec{f} = -6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$. La position de la sphère est repérée par l'angle $\theta(t)$ formé à l'instant t par le fil avec la verticale. On néglige la poussée d'Archimède devant les autres forces en jeu et on suppose que le fil reste constamment tendu au cours du mouvement.

1) Déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ au cours du mouvement.

2) Dans le cas d'oscillations de faible amplitude, exprimer la pseudo-pulsation Ω en fonction des données de l'énoncé.

3) En déduire l'expression de la viscosité η en fonction de la pseudo-période T, de la période propre T_0 (période en l'absence d'amortissement), et des données.



À haut Reynolds ($\mathcal{R}_e \gg 100$), le coefficient de trainée $\mathcal{C}_x(\mathcal{R}_e)$ est constant, ce qui traduit une force de trainée proportionnelle cette fois à v^2.

$$||\vec{F}|| = \frac{1}{2}\,\mathcal{C}_x\,\varrho\,S\,v^2 \qquad \text{donne} \qquad ||\vec{F}|| \propto v^2 \qquad \text{si} \qquad \mathcal{C}_x(\mathcal{R}_e) = \text{ Cste}$$

H2 — 11 Chute à haut Reynolds

☐☐☐☐☐

On considère un point matériel de masse m, laché sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur. Il démarre une trajectoire le long de l'axe vertical z (orienté vers le haut). Il est soumis à son poids et à une force de frottement fluide à haut Reynolds.

Pour contextualiser l'exercice, on peut penser à un parachutiste en phase de « chute libre » (c'est-à-dire lorsque le parachute n'a pas encore été ouvert) dans l'atmosphère.

1) Proposer un nombre de Reynolds pour l'écoulement autour du parachutiste et justifier qu'on doit considérer une force de frottement en v^2. On prendra comme vitesse typique du parachutiste 200 km/h.

2) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse du parachutiste.

3) Quelle est la vitesse limite atteinte par le parachutiste ? Proposer une application numérique (on prendra $\mathcal{C}_x = 0,6$) et calculer de nouveau le nombre de Reynolds avec cette vitesse pour valider le choix de la forme des frottements fluides.

4) Résoudre l'équation différentielle par séparation des variables. Obtenir alors la vitesse du parachutiste en fonction du temps et tracer cette fonction. On rappelle qu'une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{est} \qquad F(x) = \text{argth}(x)$$

avec argth la fonction réciproque de th la tangente hyperbolique.

Remarque : l'exercice H2-09 demande de résoudre une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre à coefficients constants, H2-10 une équation différentielle ordinaire linéaire du deuxième ordre à coefficients constants et H2-11 une équation différentielle ordinaire du premier ordre quelconque par séparation des variables.

Ce sont les **trois seules** équations différentielles ordinaires **à savoir résoudre** en physique. Faites l'effort de les maîtriser parfaitement.