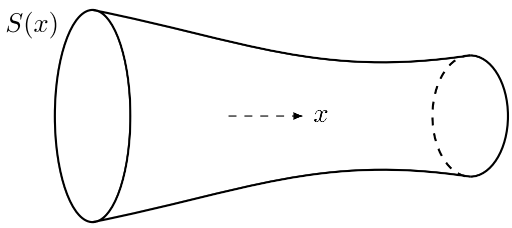
H1-TD

Cinématique des fluides

Dans ce TD les expressions des opérateurs différentiels ne sont pas données : elles se trouvent toutes dans le formulaire fourni en cours.

H1 — 01 Tube de section variable

Un fluide circule dans un tube de section variable $S(x)$. On suppose l'écoulement unidimensionnel : $\varrho = \varrho(x,\, t)$ et $\vec{v} = v(x,\, t)\,\vec{e_x}$.



1) Que pensez-vous de cette hypothèse ?

2) Calculer les débits massique D_m et volumique D_V.

3) Quelles sont les propriétés des débits si : (a) l'écoulement est incompressible ; (b) l'écoulement est stationnaire ; (c) l'écoulement est à la fois incompressible et stationnaire ?

H1 — 02 Champ des vitesses dans un dièdre

On considère un écoulement dans un dièdre, c'est-à-dire dans la région $x > 0,\ y > 0$ (limitée par des parois). Le champ des vitesses est

$$\vec{v} = k\,(-x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y})$$

où k est une constante.

1) Définir une ligne de courant. Comment peut-on les déterminer mathématiquement ? On peut calculer que les lignes de courant sont ici des hyperboles

$$y = \frac{K}{x} \qquad \text{avec} \qquad K \ \text{ une constante.}$$

En dessiner plusieurs et les orienter.

2) Calculer l'accélération $\vec{a}$ de deux manières.

3) Calculer $\operatorname{div}\vec{v}$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v}$.

4) Caractériser l'écoulement.

5) Définir une ligne équipotentielle. Comment peut-on les déterminer mathématiquement ?

Données : On a $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\right)\vec{v} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,v^2 + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}$.

H1 — 03 Écoulement potentiel

Un fluide en écoulement permanent et incompressible possède le potentiel des vitesses suivant (en coordonnées cylindriques) $\varphi = -A\,\theta + B\ln r$ avec A et B des constantes strictement positives.

1) Donner les composantes de la vitesse.

2) Vérifier que l'équation de conservation de la masse est bien satisfaite.

On étudie un **autre écoulement** défini par $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi$ avec $\varphi = a\,(x^2 - y^2)$ où x et y sont les coordonnées cartésiennes dans le plan et a une constante positive.

3) Déterminer le champ de vitesse.

4) Montrer que ce champ de vitesse décrit un écoulement incompressible.

5) Calculer l'accélération particulaire $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$.

Données : On s'aidera du formulaire sur les opérateurs différentiels pour les premières questions.

H1 — 04 Oscillations d'une bulle

On considère une bulle d'air de centre O et de rayon R à l'intérieur d'un récipient (que l'on considérera de dimensions infinies) qui contient un fluide incompressible de masse volumique μ_0. Cette bulle oscille de telle sorte que son rayon évolue suivant

$$R(t) = R_0 + \varepsilon \sin(\omega t) \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon \ll R_0$$

Déterminer le champ de vitesse $\vec{v}$ dans tout l'espace, sachant que la vitesse des particules de fluide au contact de la bulle est égale à la vitesse de la paroi de la bulle.

H1 — 05 Écoulement tourbillonnaire : tornade

On considère l'écoulement orthoradial $\vec{v} = v(r)\,\vec{e_\theta}$, appelé **tourbillon** (ou vortex) **de Rankine**, tel que

- pour $r < a$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \gamma\,\vec{e_z}$;
- pour $r > a$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$

1) Quelle est la forme géométrique des lignes de courant ?

2) Calculer la circulation du vecteur vitesse sur une ligne de courant.

3) En utilisant le théorème de Stokes, la relier à γ.

4) En déduire l'expression de la vitesse en tout point de l'espace. Tracer $v_\theta(r)$.

Conclusion : On remarquera que dans la zone $r > a$ le champ de vitesse tourne mais $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$. Les particules de fluide sont en fait en translation circulaire et non en rotation.

H1 — 06 Un n-ième écoulement

Dans le demi-espace $y > 0$, un fluide est caractérisé par un champ de vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = a\,\mathrm{e}^{-k\,y}\,\cos(\omega\,t - k\,y)\,\vec{e_x}$$

1) Le champ de vitesse est-il stationnaire ? incompressible ? irrotationnel ? Quelle est la forme des lignes de courant ?

H1 — 07 Un $n+1$ -ième écoulement

Un fluide s'écoule entre deux cylindres coaxiaux d'axe (Oz), de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Les cylindres tournent à des vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2. En coordonnées cylindriques, le champ de vitesse s'écrit

$$\vec{v} = \left(A\,r + \frac{B}{r}\right)\vec{e_\theta}$$

1) Le champ de vitesse est-il stationnaire ? incompressible ? irrotationnel ? Quelle est la forme des lignes de courant ?

2) Le fluide est visqueux donc ne glisse pas sur les parois (ce qu'on discutera dans le chapitre H2). En déduire les constantes A et B.

3) Existe-t-il un potentiel des vitesses ?

H1 — 08 Écoulement entre deux plaques

De l'air s'écoule dans une canalisation à symétrie cylindrique d'axe (Oz), constituée d'un disque inférieur de centre O et de rayon R, et d'un disque supérieur identique, de cote e, percé d'un trou et raccordé à un tuyau vertical de rayon a et d'axe (Oz). L'écoulement est supposé parfait, stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène de masse volumique μ. On adopte un système de coordonnées cylindriques. On cherche un champ des vitesses dans les trois zones (1), (2) et (3) sous la forme

$$\vec{v}_1 = -v_0\,\vec{u_z}, \qquad \vec{v}_2 = A\,r\,\vec{u_r} + B\,z\,\vec{u_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_3 = v(r,\,z)\,\vec{u_r}$$

On rappelle l'expression de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques pour un champ de la forme $\vec{v} = v_r(r,\,z)\,\vec{u_r} + v_z(r,\,z)\,\vec{u_z}$:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\,v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{u_\theta}$$

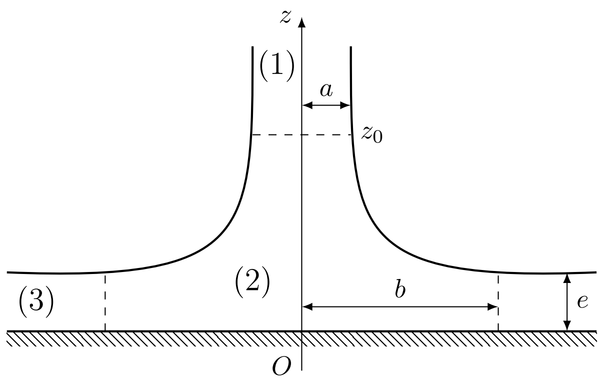
1) Exprimer le débit volumique à travers une section $z =$ Cste de la canalisation orientée dans le sens du courant dans la zone (1) en fonction de v_0 et a.

2) On s'intéresse à l'écoulement dans la zone (3). Montrer que $v_r(r,\,z)$ est indépendant de z.

3) Exprimer le débit volumique D_v à travers une section $r =$ Cste de l'écoulement en fonction de e, $v_r(r)$ et r. En déduire l'expression de $v_r(r)$ en fonction de r, e, a et v_0.

4) On s'intéresse à l'écoulement dans la zone (2). Exprimer B en fonction de v_0 et z_0, puis A en fonction de a, b, e et v_0.

5) Établir par ailleurs une relation entre A et B, et en déduire une expression de b en fonction de z_0, a et e.



H1 — 09 Source de fluide

Une source S ponctuelle tridimensionnelle située en O, origine du système de coordonnées sphériques, émet un fluide incompressible dans toutes les directions de l'espace, de manière isotrope, avec un débit volumique D_v constant.

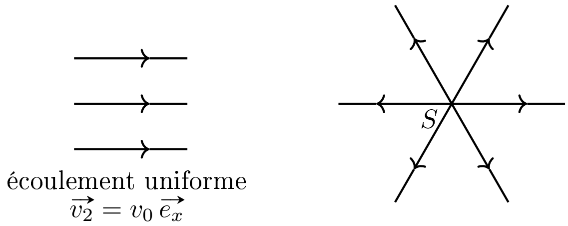
1) Déterminer le champ de vitesse $\overrightarrow{v_1}$ associé à cet écoulement.

2) L'écoulement est-il stationnaire ? Existe-t-il un potentiel des vitesses ? Est-il incompressible ?

3) On superpose à l'écoulement précédent un écoulement uniforme de la forme $\overrightarrow{v_2} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$. Déterminer le champ de vitesse résultant.

4) Ce champ de vitesse est-il incompressible ? irrotationnel ?

5) Montrer qu'il existe un point d'arrêt (point de vitesse nulle).



H1 — 10 Écoulement potentiel 2

On étudie l'écoulement E irrotationnel et permanent d'un fluide incompressible (de masse volumique μ) autour d'un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R, qui tourne autour de (Oz) à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\,\overrightarrow{u_z}$. Le fluide a, très loin du cylindre, la vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$ de direction perpendiculaire à (Oz). Un point M dans le fluide sera repéré par ses coordonnées cylindriques $(r,\,\theta,\,z)$.

L'écoulement E peut être considéré comme la superposition de deux écoulements :

— E_1, de potentiel des vitesses

$$\varphi_1 = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) r\,v_0\,\cos\theta$$

correspondant à l'écoulement qu'on observerait si le cylindre ne tournait pas sur lui-même ;

— E_2, de potentiel des vitesses

$$\varphi_2 = -k\,\theta$$

correspondant à l'écoulement qu'on observerait si le fluide était au repos ($v_0 = 0$).

1) Vérifier que E est un écoulement potentiel.

2) Obtenir le champ des vitesses $\vec{v}$ dans le fluide.

3) Calculer la circulation du champ de vitesse le long d'un cercle entourant le cylindre, de deux manières différentes, pour déduire une relation entre R, v_0 et k.

4) Déterminer, suivant la valeur de $a = k/(R\,v_0)$, le nombre de points d'arrêt (point de vitesse nulle) dans l'écoulement.