EM 4/5/6 - TD

Magnétostatique

EM4 — 01 Conducteur cylindrique infini creux

Soit un cylidre métallique d'axe (Oz) de rayon R. On suppose son épaisseur très fine devant R, si bien qu'on peut considérer qu'il est parcouru par une densité linéïque homogène de courant $j_s\,\vec{e_z}$. Le courant total est noté I. On a

$$I = \int_{\mathcal{C}} j_s\,\vec{e_z}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}_\perp$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}_\perp$ est orthogonal en tout point au chemin $\mathcal{C}$.

1) Exprimer le champ magnétique à l'extérieur du cylindre en fonction de I.

2) Quel est le lien entre I et j_s ? En déduire une expression du champ magnétique à l'extérieur du cylindre en fonction de j_s.

3) Montrer que $\vec{B}$ subit une discontinuité à la traversée du cylindre. C'est une propriété général du champ magnétique à la traversée d'une distribution de courant le long d'un plan (exactement comme le champ électrique subit une discontinuité en présence d'une distribution de charges dans un plan).

EM4 — 02 Magnéton de Bohr

On étudie le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène. Un électron décrit une orbite circulaire de rayon R autour d'un proton en O, à une vitesse angulaire ω.

1) Déterminer le moment cinétique $\vec{L}$ de l'électron par rapport à O.

2) Montrer que son moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ peut s'écrire $\vec{\mathcal{M}} = \gamma\vec{L}$ où γ est appelé facteur gyromagnétique.

3) Pour expliquer le spectre de l'hydrogène, Bohr a postulé la quantification du moment cinétique

$$L = n\,\hbar$$

où $\hbar$ est la constante de Planck réduite et n est u entier strictement positif. Montrer qu'alors le moment magnétique est lui aussi quantifié. En déduire la valeur du moment magnétique pour l'orbite $n = 1$, appelé magnéton de Bohr μ_B.

4) Comment s'appelle l'expérience historique qui a mis en évidence la quantification du moment magnétique ? L'expliciter rapidement.

5) Comparer μ_B à la valeur du moment magnétique d'une spire de surface 1 cm^2 parcourue par un courant de 1 μA.

EM4 — 03 Inductance linéïque d'un câble coaxial ☐☐☐☐☐

On modélise un câble coaxial par deux cylindres conducteurs de même axe (Oz), et de rayon respectivement R_1 (l'« âme ») et R_2 (la « gaine »). Au niveau de la surface entre l'âme et la gaine circule un courant I selon (Oz) uniformément distribué. La surface extérieure de la gaine véhicule l'intensité $-I$ selon (Oz), uniformément distribuée.

1) Obtenir l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace, pour un câble infini.

2) On considère que le câble est de longueur h, et on fait l'hypothèse que le champ reste nul partout en dehors du câble. On admet que l'énergie magnétique s'écrit

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\,L\,I^2 \qquad \text{et aussi} \qquad \mathcal{E}_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2\,\mu_0}\,B^2\,\mathrm{d}\tau$$

En déduire l'expression de l'inductance linéïque $\ell = L/h$ du câble.

3) Faire l'application numérique pour $R_1 = 1$ mm et $R_2 = 2,5$ mm.

EM4 — 04 Moment magnétique d'un disque tournant

On considère un disque isolant de rayon R, portant une charge électrique σ par unité de surface uniforme. Le disque tourne autour de son axe (Δ) à une vitesse angulaire ω constante.

1) Calculer son moment magnétique.

2) Expliciter dans ce contexte l'approximation dipolaire. Représenter les lignes de champ magnétique créées par le disque.

EM4 — 05 Force d'adhérence entre deux aimants

On part de la constatation suivante : il est parfois difficile de séparer deux aimants collés ensemble par leur attraction magnétique. On veut déterminer un ordre de grandeur de cette force.

1) Proposer un ordre de grandeur pour l'aimantation d'un aimant. On rappelle que l'aimantation $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est le moment magnétique total par unité de volume. En déduire en ordre de grandeur le moment magnétique d'un aimant de 1 cm^3.

2) On suppose que les deux aimants sont identiques, d'aimantation $\mathcal{M}$ en norme. On souhaite obtenir par analyse dimensionnelle une expression de la force d'adhérence entre eux à un facteur numérique près. Cette force fait raisonnablement intervenir la surface en contact S, la perméabilité du vide μ_0 et l'aimantation $\mathcal{M}$, si bien qu'elle s'écrit

$$F = C\,\mu_0^\alpha\,\mathcal{M}^\beta\,S^\gamma$$

avec C une constante qu'on ne cherche pas à expliciter. Déterminer les nombres α, β et γ.

3) Proposer alors un ordre de grandeur de F/S pour des aimants communs, en supposant que $C \sim 1$ en ordre de grandeur. Comparer cette valeur à la pression atmosphérique.

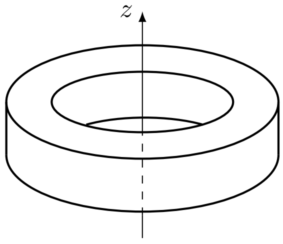
EM4 — 06 Vitesse des électrons dans un conducteur

1) Estimer en ordre de grandeur la vitesse typique d'un électron dans un fil de cuivre de TP parcouru par un courant de 10 mA.

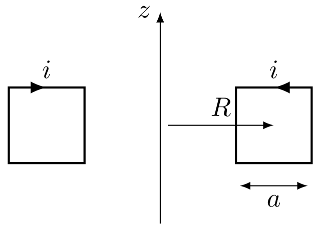
EM4 — 07 Bobine torique

Une bobine torique de section carrée de côté a est constituée de N spires jointives planes et régulièrement enroulées sur un tore de révolution d'axe (Oz) et de rayon moyen R. Elle est parcourue par un courant i.

1) Déterminer le champ $\vec{B}(M)$ partout dans l'espace.



Vue de perspective



Vue en coupe

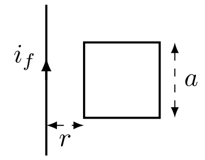
Réponse : $\vec{B}(\vec{r}) = B(r,z)\,\vec{e_\theta}$, contour d'ampère cercle d'axe z, $B(r,z) = \mu_0\,N\,i/(2\,\pi\,r)$ dans la bobine, $B(r,z) = 0$ dehors.

EM4 — 08 Inductance mutuelle entre un fil et une spire

On considère un fil infini d'axe (Oz) parcouru par un courant constant i_f.

1) Calculer rigoureusement le champ $\overrightarrow{B_f}$ créé par le fil dans tout l'espace.

2) On place à proximité du fil une spire carrée de côté a dans un plan contenant (Oz). Calculer le flux $\phi_{f\to s}$ du champ $\overrightarrow{B_f}$ créé par le fil à travers la spire. On donne $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_\theta}$ pour un élément de surface de la spire, en coordonnées cylindriques.



3) On définit l'inductance mutuelle M entre le fil et la spire par

$$\phi_{f\to s} = M\,i_f$$

Déterminer M.

EM4 — 09 Mouvement d'un dipôle magnétique

On peut montrer qu'une spire circulaire de rayon R, de centre O et d'axe (Ox), parcourue par un courant constant i, crée sur son axe un champ magnétique

$$\overrightarrow{B}(x) = B_0\,\frac{R^3}{(R^2+x^2)^{3/2}}\,\overrightarrow{e_x} \qquad \text{avec} \qquad B_0 = \frac{\mu_0\,I}{2\,R}$$

Sur son axe, à l'abscisse x, est placé un dipôle magnétique de moment $\overrightarrow{\mathfrak{m}}$ de direction quelconque, et libre de se déplacer en rotation comme en translation.

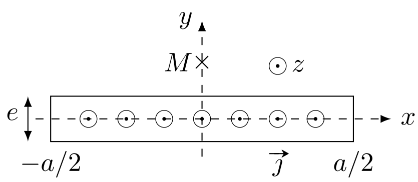
1) Trouver la position d'équilibre stable du dipôle (en orientation et en position).

2) Le dipôle garde son orientation stable précédemment trouvée, mais est légèrement décalé sur l'axe (Ox) par rapport à sa position d'équilibre. Sachant que sa masse est m et que la seule force qui s'exerce suivant cet axe est la force magnétique, obtenir la période T de ses petites oscillations.

EM4 — 10 Plaque épaisse parcourue par un courant

Une plaque très longue suivant l'axe (Oz), d'épaisseur $e = 1{,}0$ mm (suivant y) et de largeur $a = 5{,}0$ cm (suivant x) est parcourue par un courant de densité volumique $\overrightarrow{\jmath} = j\,\overrightarrow{e_z}$ uniforme.

Nous cherchons le champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$ créé en un point M de l'axe (Oy) par cette plaque lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité $I = 10$ A. On rappelle $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H·m^{-1}.



1) Par des arguments précis de symétries, obtenir la direction du champ $\overrightarrow{B}$.

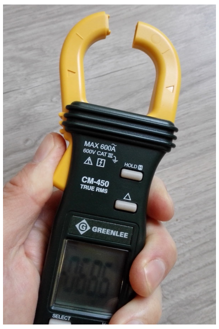
2) On cherche le champ magnétostatique en M de coordonnées $(0,\, y_M,\, 0)$ avec $y_M = 2{,}0$ mm. On fait dans cette question l'hypothèse que la plaque est aussi infinie dans la direction x. À quelle condition cette hypothèse vous paraît-elle valable ? Calculer le champ $\overrightarrow{B}$ en M dans cette modélisation.

3) Calculer numériquement sa norme.

4) Nous prenons dorénavant $y_M = 1$ m. Le modèle précédent est-il toujours pertinent ? Proposer dans le cas contraire un autre modèle pour obtenir le champ $\overrightarrow{B}$ en M.

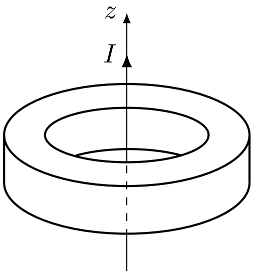
EM4 — 11 Pince ampèremétrique

On étudie une pince ampèremétrique à induction. Il s'agit d'un instrument de mesure de l'intensité du courant électrique dans un fil conducteur, par exemple utilisé par les techniciens intervenant sur les lignes électriques. La pince se place autour du fil conducteur dans lequel on veut mesurer le courant.

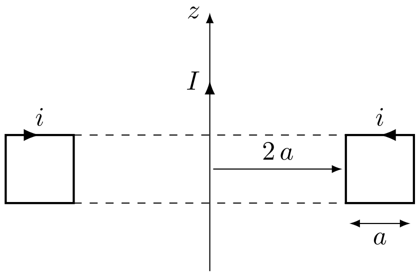


La pince est constituée d'un tore de section carrée de côté a, d'axe (Oz) et de rayon moyen $5\,a\,/\,2$; sur lequel est bobiné un fil. Ce fil de résistance R réalise N spires autour du tore.

Le conducteur enlacé par la pince est modélisé par un fil infini confondu avec l'axe (Oz), parcouru par un courant sinusoïdal $I(t) = I_0\,\cos\omega\,t$. On se place dans le cadre de l'ARQS dans tout l'exercice.



Vue en perspective



Vue en coupe

1) Justifier l'existence d'un courant $i(t)$ dans le bobinage torique de la pince ampèremétrique. Ce courant s'écrit

$$i(t) = i_0\,\cos(\omega\,t + \varphi)$$

2) On note $\overrightarrow{B}$ le champ magnétique total créé par le courant $I(t)$ dans le fil et par le courant $i(t)$ dans la pince. En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution des courants, montrer que le champ magnétique est nécessairement orthoradial. Montrer ensuite, grâce à l'étude des invariances, que celui-ci se met sous la forme

$$\overrightarrow{B} = B(r,\,z,\,t)\,\overrightarrow{e_\theta}$$

3) En appliquant le théorème d'Ampère à un contour $(\mathcal{C})$ judicieusement choisi, déterminer l'expression du champ $\overrightarrow{B}$ à l'intérieur du tore, c'est-à-dire pour z entre $-a\,/\,2$ et $a\,/\,2$ et pour r entre $2\,a$ et $3\,a$.

4) Établir l'expression du flux ϕ du champ $\overrightarrow{B}$ à travers une spire du tore en fonction de μ_0, I, i, N et a. En déduire le flux total Φ à travers les N spires du tore.

5) Rappeler les définitions de l'inductance propre du tore et de l'inductance mutuelle entre le tore et le fil. On peut déduire des calculs de la question précédente les expressions suivantes pour ces inductances

$$L = \frac{\mu_0\,N^2\,a}{2\,\pi}\,\ln\left(\frac{3}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad M = \frac{\mu_0\,N\,a}{2\,\pi}\,\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

6) Établir l'expression de la force électromotrice $e(t)$ induite dans le tore en fonction de L, M, $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$.

7) Le tore de résistance R est fermé sur un ampèremètre de résistance négligeable. On note $\underline{H} = \underline{i}\,/\,\underline{I}$ la fonction de transfert en courant de la pince ampèremétrique (lien entre le courant à mesurer I et le courant induit par celui-ci dans la pince i). En utilisant la notation complexe, déterminer $\underline{H}$ en fonction de M, L, R et ω.

8) Calculer le module $|\underline{H}|$ de la fonction de transfert. Que devient cette expression à haute et à basse fréquence ? Ce dispositif permet-il de mesurer des intensités dans toutes les gammes de fréquence ? En particulier, permet-il de mesurer l'intensité d'un courant continu ?

9) Quel est l'intérêt d'une pince ampèremétrique par rapport à un ampèremètre classique ? Conclure en donnant un avantage et un inconvénient de ce dispositif.

EM4 — 12 Coefficient d'inductance mutuelle

On considère deux solénoïdes de même longueur L, coaxiaux d'axe (Oz), et de rayons respectifs R_1 et $R_2 < R_1$. Le solénoïde intérieur 2 possède N_2 spires et est en circuit ouvert, tandis que le solénoïde extérieur 1 possède N_1 spires et est parcouru par un courant i_1.

1) En supposant que le champ magnétique créé par un solénoïde est nul en dehors de celui-ci, calculer rigoureusement le champ magnétique créé par le solénoïde extérieur dans tout l'espace.

2) En déduire que l'inductance propre L_1 du solénoïde extérieur vaut

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2 \, \pi \, R_1^2}{L}$$

La calculer numériquement.

3) Donner L_2, l'inductance propre du solénoïde intérieur. La calculer numériquement.

4) On définit le coefficient d'inductance mutuelle $M_{1\to 2}$ du circuit 1 sur le circuit 2 par

$$\phi_{1\to 2} = M_{1\to 2} \, i_1$$

où $\phi_{1\to 2}$ est le flux du champ magnétique créé par le circuit 1 à travers le circuit 2. Calculer $M_{1\to 2}$ et l'évaluer numériquement.

5) Vérifier que $M_{1\to 2}^2 \leqslant L_1 \, L_2$.

Données. On donne $N_1 = 700$ spires, $N_2 = 500$ spires, $L = 20$ cm, $R_1 = 10$ cm, $R_2 = 5$ cm.

Remarque. On peut montrer (théorème de Neumann) que $M_{1\to 2} = M_{2\to 1} \equiv M$.

Remarque. On démontre que $M^2 \leqslant L_1 \, L_2$ dans cet exercice. C'est une propriété générale du coefficient d'inductance mutuelle. Au maximum, $M^2 = L_1 \, L_2$. On dit dans ce cas que le couplage magnétique entre les deux circuits est parfait.