D2-TD

Diffusion thermique

D2 — 01 Petits exercices indépendants

1) L'intérieur (température T_i) et l'extérieur (température T_e) d'une maison sont séparés par un mur d'épaisseur $L = 30$ cm et de conductivité thermique $\lambda = 0,7\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Ce mur est recouvert d'un revêtement isolant d'épaisseur $e = 2$ cm et de conductivité $\lambda' = 0,03\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Calculer le rapport $\mathcal{P}'/\mathcal{P}$ de la puissance perdue avec et sans revêtement.

2) On considère deux barres, sans pertes thermiques latérales, en régime permanent. Leurs longueurs respectives sont L_1 et L_2, et leur conductivité thermique λ_1 et λ_2. Le début de la première barre est maintenu à la température T_1 et le bout de la seconde à T_2. Calculer la température à la jonction.

3) On considère une barre de longueur L, calorifugée latéralement, dont les extrémités sont maintenues à T_1 et T_2. Sa conductivité thermique dépend de la température selon $\lambda = \alpha/T$, où α est une constante. Calculer la température au centre de la barre.

4) On prend un fil électrique infiniment long parcouru par un courant. Une puissance thermique p_0 est dégagée par effet Joule par unité de longueur. Autour du fil, la forme de la densité de flux thermique est raisonnablement $\vec{\jmath}_Q = j_Q(r)\vec{e}_r$. En régime stationnaire, établir l'expression de $j_Q(r)$ par une méthode intégrale (sans utiliser l'opérateur divergence).

5) En symétrie sphérique, on considère le milieu contenu entre deux sphères de rayon R_1 et $R_2 > R_1$. Le milieu $r < R_1$ est à température T_1 et le milieu $r > R_2$ est à température T_2. Du fait de la symétrie sphérique du problème, on a $T = T(r)$ et $\vec{\jmath}_Q = j_Q(r)\vec{e}_r$. En régime stationnaire, construire la résistance thermique du milieu contenu entre R_1 et R_2. On rappelle l'expression du gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

6) Il faut 2 h pour cuire au four une dinde de 3 kg. Combien en faut-il pour une dinde de 6 kg ?

D2 — 02 Double vitrage

Le but est de comparer les efficacités isolantes d'un simple et d'un double vitrage. On considère pour cela une surface vitrée $\mathcal{S}$ séparant l'intérieur d'une pièce à la température T_i de l'extérieur à la température T_e. On suppose le problème unidimensionnel : le profil de température ne dépend que de x, (Ox) étant un axe perpendiculaire à la fenêtre. On donne les conductivités thermiques du verre ($\kappa_v = 1,6\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$) et de l'air ($\kappa = 0,024\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$). Les échanges thermiques à une interface air-verre sont pris en compte par une loi de transfert convecto-diffusif (loi de Newton) de la forme $\vec{\jmath}_Q = h\,(T_1 - T_2)\,\vec{n}_{1\to 2}$, où T_1 et T_2 désignent les températures de part et d'autres de l'interface, $\vec{n}_{1\to 2}$ est le vecteur unitaire orienté de 1 vers 2, normal à l'interface, et où $\vec{\jmath}_Q$ est la densité de courant thermique. Le constructeur donne les valeurs suivantes pour le coefficient de transfert thermique h :

— $h = h_i = 9,1\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ pour le contact entre le verre et l'air d'un local fermé ;
— $h = h_e = 16,6\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ pour le contact entre le verre et l'air extérieur.

On considère dans ce problème uniquement les régimes permanents.

1) Montrer que la loi de transfert convecto-diffusif, exprimée pour une interface de surface $\mathcal{S}$, peut être mise sous la forme d'une résistance thermique de convection R à exprimer en fonction de h et $\mathcal{S}$. Expliquer brièvement la signification de h et pourquoi $h_e > h_i$.

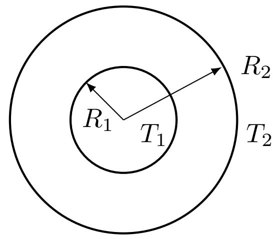
2) En déduire la résistance thermique d'un vitrage simple, constitué d'une vitre d'épaisseur $e = 4,0$ mm et d'aire $\mathcal{S} = 1,0\ \mathrm{m^2}$. Comparer avec la valeur donnée par le constructeur : $0,17\ \mathrm{K\cdot W^{-1}}$. Conclure.

3) Donner l'expression de la résistance thermique d'un double vitrage constitué de deux vitres parallèles d'épaisseur $e = 4,0$ mm, séparées par une couche d'air d'épaisseur $e' = 6,0$ mm. On considérera que la couche d'air intermédiaire conduit la chaleur par conduction. Calculer numériquement cette résistance pour $\mathcal{S} = 1,0\ \mathrm{m^2}$. Comparer avec la valeur donnée par le constructeur : $0,28\ \mathrm{K\cdot W^{-1}}$. Conclure et proposer une explication.

D2 — 03 Évolution temporelle

(Régime quasi-stationnaire, analogie entre capacité électrocinétique et capacité thermique.)

On étudie deux sphères concentriques (rayons R_1 et $R_2 > R_1$). Le milieu $r < R_1$ est à température uniforme fixe T_1. Le milieu $r > R_2$ est à température uniforme et fixe T_2. Le milieu entre R_1 et R_2 est caractérisé par sa conductivité thermique λ. On se place en régime stationnaire. Vu la géométrie sphérique du problème, on a $T = T(r)$ et $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(r)\,\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques. On supposera les contacts thermiques parfaits.



1) Déterminer la température $T(r)$ entre R_1 et R_2, ainsi que le flux thermique $\mathcal{P}$.

2) En déduire la résistance thermique associée à cette géométrie sphérique.

3) Maintenant, on suppose que la boule de rayon R_1 est un corps solide de capacité thermique C. Initialement, sa température est $T_1 = T_i$. Déterminer $T_1(t)$ en supposant l'évolution quasi-stationnaire.

Données. On donne le gradient en coordonnées sphériques pour le champ $T(r)$ $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T(r) = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_r}$.

D2 — 04 Bilan d'entropie 1

On considère une barre entre deux thermostats de températures T_1 et T_2. La barre est caractérisée par sa résistance thermique R_{th}. On note δS_e l'entropie reçue par la barre par échange thermique avec les thermostats. On note δS_c l'entropie créée pendant $\mathrm{d}t$. On se place en régime permanent.

1) Quel est le flux thermique traversant la barre ?

2) En déduire l'entropie échangée avec chacun des thermostat pendant $\mathrm{d}t$, puis l'entropie échangée pendant $\mathrm{d}t$ totale δS_e.

3) En déduire l'entropie créée pendant $\mathrm{d}t$. Commenter.

D2 — 05 Fusible

Un fusible est constitué par un fil conducteur cylindrique homogène, de section droite d'aire S, de longueur L, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. Il possède une conductivité thermique κ et une résistance électrique linéïque $r = 1/(\gamma\, S)$, avec γ la conductivité électrique. Il est traversé par un courant électrique continu d'intensité I. Ce fil est enfermé dans une capsule remplie d'une substance assurant une isolation thermique et électrique parfaite. Les températures en $x = 0$ et $x = L$ sont imposées et égales à la température T_0 du milieu ambiant. On se place en régime permanent.

Données : $\kappa = 65$ S.I., $c = 460$ S.I., $\gamma = 1,2 \times 10^6$ S.I., $\mu = 2700\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $T_0 = 290$ K et $L = 2,5$ cm.

1) Établir l'équation différentielle vérifiée par la température T. Donner l'expression littérale de $T(x)$ et représenter graphiquement T en fonction de x.

2) Le matériau constituant le fil fond à $T_f = 390$ K. On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale $I_{\max} = 16$ A. Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de $I_{\max}$. Déterminer l'expression littérale de l'aire S à prévoir. Faire l'application numérique.

D2 — 07 Fonte d'un glaçon

On s'intéresse à la fonte d'un glaçon sphérique de rayon a dans l'eau. La température du glaçon est $T_1 = 0°\mathrm{C}$. La température de l'eau à grande distance du glaçon est $T_2 > 0°\mathrm{C}$. Vu la géométrie sphérique de la situation, on supposera raisonnablement que $T = T(r,\, t)$ et $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(r,\, t)\,\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques.

1) On étudie le régime stationnaire. Quel est le champ de température dans l'eau $T(r)$? Quel est la puissance thermique qui traverse une sphère de rayon r ?

2) On précise l'enthalpie massique de fusion de la glace L_f. On suppose le régime quasi-stationnaire. En déduire l'évolution temporelle du rayon $a(t)$.

3) Le glaçon fait initialement $a_0 = 1,5$ cm de rayon. Au bout de combien de temps a-t-il complètement fondu ?

Données : $T_2 = 20°\mathrm{C}$, et $L_f = 330\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$. On note $\varrho = 917\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ la masse volumique de la glace, ainsi que $\lambda = 0,6\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ la conductivité thermique de l'eau liquide et on donne le gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

D2 — 06 Bilan d'entropie 2

On souhaite écrire l'équivalent de l'équation de conservation locale de l'énergie pour l'entropie. On considère un système unidimensionnel, pour lequel on a $T(x,\, t)$ et $\vec{\jmath}_Q = j_Q(x,\, t)\,\vec{e}_x$. On étudie une tranche de solide entre x et $x + \mathrm{d}x$ (surface $\mathcal{S}$), entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$. On note $s(x,\, t)$ l'entropie massique du système et ϱ sa masse volumique (constante). Les parois latérales sont calorifugées.

1) Écrire la variation d'entropie de cette tranche de solide entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

2) Écrire l'entropie échangée avec la partie solide $< x$, puis celle échangée avec la partie $> x + \mathrm{d}x$, et enfin l'entropie échangée totale.

3) On note σ l'entropie créée par unité de volume et de temps. À partir du second principe de la thermodynamique, écrire une équation aux dérivées partielles reliant $T(x,\, t)$, $j_Q(x,\, t)$ et σ.

4) Rappeler l'équation de conservation locale de l'énergie pour ce système. En déduire l'expression de σ.

5) Utiliser la loi de Fourier pour établir le signe de λ. Commentaire.

Données. On donne l'entropie massique pour une phase incompressible indilatable $s(x,\, t) = c \ln T(x,\, t)$, avec c la capacité thermique massique du solide.

D2 — 08 Isolation d'une canalisation

(Diffusion thermique en géométrie cylindrique.)

Une canalisation cylindrique de rayon R_1 est entourée d'une couche d'isolant. Le rayon extérieur de la couche d'isolant est R_2. La température dans la canalisation est uniforme égale à T_1. La température à l'extérieur est uniforme égale à T_0. On étudie le régime stationnaire. Le problème ayant une symétrie cylindrique, on supposera que $T = T(r)$ et $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(r)\,\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées cylindriques.

1) Déterminer la puissance thermique $\mathcal{P}$ à travers l'isolant en fonction de $j_Q(r)$ la densité surfacique de flux thermique.

2) En déduire le champ de température dans l'isolant $T(r)$.

3) En déduire la puissance thermique qui traverse l'isolant et identifier une résistance thermique adaptée au cas cylindrique.

Données : On donne le gradient en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}$$

D2 — 13 Température dans une cave - Onde thermique

(Effet de peau thermique, effet de cave.)

Le sol terrestre est localement assimilé au demi-espace $z > 0$ (axe (Oz) vers le bas) homogène, de masse volumique $\rho = 3,1 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; de capacité calorifique massique $c = 870\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$; et de conductivité thermique $\lambda = 1,8\ \mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$. Le champ de température dans le sol est noté $T(z,\, t)$. On suppose que la température au niveau du sol ($z = 0$) évolue au cours de l'année suivant la loi

$$T(z = 0,\, t) = T_0 + \theta\, \cos(\omega\, t)$$

où θ est une constante et $\omega = (2\,\pi)/\tau$ avec $\tau = 1$ an. À grande profondeur, la température du sol tend vers la moyenne annuelle

$$T(z \to +\infty,\, t) = T_0$$

1) Quelle est l'équation vérifiée par la température dans le sol ? On pose $T(z,\, t) = T_0 + u(z,\, t)$ et on cherche une solution sous la forme complexe

$$\underline{u}(z,\, t) = \underline{f}(z)\, \exp(\mathrm{i}\, \omega\, t)$$

Introduire $\delta = \sqrt{(2\,\lambda)/(\rho\, c\, \omega)}$ et donner $T(z,\, t)$ en fonction de ω et δ. Commenter cette solution.

2) Entre l'été et l'hiver, la température au sol passe de 30°C à −10°C. Que valent T_0 et θ ? Quelle est la variation de température dans une cave enfouie à 2 m de profondeur ?

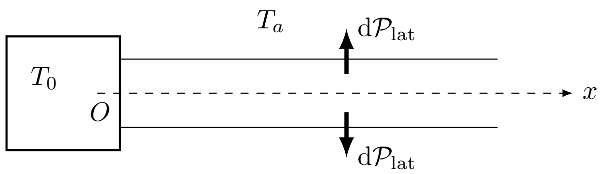
3)) Même question pour une variation de température jour / nuit.

D2 — 09 Ailette de refroidissement

On considère une ailette de refroidissement, de forme cylindrique de rayon a et de longueur infinie. En $x = 0$ se trouve une source de chaleur dont on cherche à évacuer l'énergie grâce à l'ailette. On modélise la source de chaleur par un thermostat de température constante T_0. Tout le long de l'ailette se produisent des échanges d'énergie avec l'extérieur, par conducto-convection. Ils suivent la loi de Newton

$$\mathrm{d}\mathcal{P}_{\text{lat}} = h\,(T(x) - T_a)\,\mathrm{d}S$$

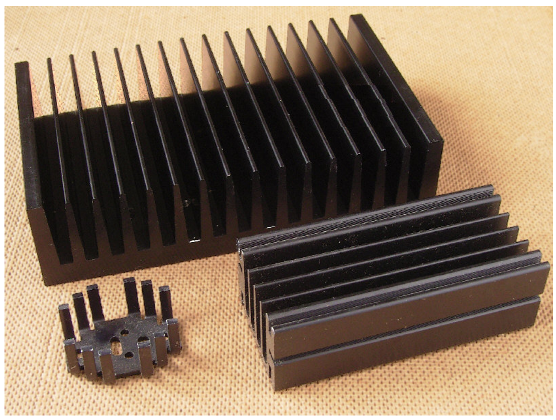
avec T_a la température de l'atmosphère. L'ailette est caractérisée par sa masse volumique ϱ, sa capacité calorifique massique c et sa conductivité thermique λ.



1) Déterminer le champ de température dans l'ailette $T(x)$ en régime stationnaire, en raisonnant sur un élément de l'ailette entre x et $x + \mathrm{d}x$.

2) En déduire la puissance totale évacuée vers l'atmosphère grâce à l'ailette.

Remarques. Ci-contre la photo de trois types de dissipateurs thermiques, composées d'ailettes de différentes géométries. Le plus massif contient 14 ailettes de forme plane. Ces dispositifs se collent directement sur l'élément chaud (petit moteur électrique, générateur de puissance,...) et aident à le refroidir en maximisant la surface réalisant des échanges thermiques avec l'atmosphère.



D2 — 10 Sphère radioactive

Une sphère radioactive dégage une puissance thermique σ par unité de volume. La matériau est caractérisé par une masse volumique ϱ, une capacité calorifique massique c et une conductivité thermique λ. La sphère est de rayon R_1 et à sa surface la température est T_1. On suppose T_1 constante.

1) On étudie le régime stationnaire. Vu la géométrie sphérique de la situation, on supposera raisonnablement que $T = T(r,\,t)$ et $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(r,\,t)\,\overrightarrow{e_r}$. Démontrer l'équation de conservation de l'énergie.

2) Quel est le champ de température dans la sphère $T(r)$?

Données : On donne le gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

D2 — 11 Chat alors !

On modélise un chat par une sphère de rayon R. Le métabolisme du chat produit une puissance P_0. La conductivité du milieu extérieur est λ_{air}, et la température loin du chat est $T_0 = 20°\text{C}$.

1) Déterminer une expression du profil de température stationnaire à l'extérieur du chat.

2) Calculer la valeur de P_0 pour que la température à la surface du chat soit $T_S = 30°\text{C}$.

3) On donne $\lambda_{\text{air}} = 0,03\ \text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ et $R = 10$ cm. Faire l'application numérique et commenter.

4) On peut raisonnablement supposer que P_0 est proportionnelle au volume de l'animal. On donne $\lambda_{\text{eau}} = 0,6\ \text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$. Pourquoi n'existe-t-il pas de petits mammifères marins ?

Données : On donne le gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_r}$$

D2 — 12 Température à l'intérieur de la Terre

La Terre est considérée comme une boule homogène de rayon $R = 6400$ km et de conductivité thermique λ. On constate l'existence d'un gradient thermique au voisinage de la surface de la Terre : la température croît de 1°C lorsqu'on s'enfonce de 32 m.

1) Dans quel sens est le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,T$? On estime la conductivité thermique du sol à $\lambda = 1\ \text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$. Évaluer alors la puissance géothermique par unité de surface au niveau du sol, puis la puissance géothermique totale.

2) On admet que cette puissance provient de réactions nucléaires à l'intérieur de la Terre : ces réactions libèrent une puissance volumique ρ qu'on suppose uniformément répartie. Déterminer alors la distribution de température à l'intérieur de la Terre. On considèrera que la température à la surface est $T(R) = T_S = 20°\text{C}$ et que le régime est permanent.

3) Dans le cadre de cette modélisation, quelle est la température au centre de la Terre ?

Données : On donne le gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_r}$$

D2 — 14 Igloo

Quelle doit être l'épaisseur minimale e des murs d'un igloo de rayon $R = 1$ m, contenant un seul habitant, si la température extérieure est de $-20°$C ? La conductivité de la glace sera prise égale à $\lambda = 0,05\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$, la température minimale nécessaire à la survie égale à $10°$C et on considérera que le métabolisme de l'habitant dégage une puissance $\mathcal{P} = 50$ W. Le régime est stationnaire.

1) Quelle est à votre avis la forme de la densité surfacique de flux thermique $\overrightarrow{j_Q}$ dans les murs de glace, supposés hémisphériques (variables et direction) ?

2) Obtenir $\overrightarrow{j_Q}$ en fonction de la puissance qui traverse les murs.

3) En déduire une résistance thermique adaptée à cette géométrie cylindrique.

4) Répondre alors à la question de l'énoncé.

Données : On donne le gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_r}$$

D2 — 17 Hypothermie (Résolution de problème)

1) Il y a un risque d'hypothermie lorsque la température du corps passe en-dessous de $35°$C. Déterminer le temps au bout duquel il y a risque d'hypothermie pour un baigneur dans la Manche à $17°$C.

Données :
- capacité thermique massique du corps humain : $c = 3,5\ \mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$;
- résistance thermique de la peau : $R = 3\times10^{-2}\ \mathrm{K\cdot W^{-1}}$;
- puissance produite par le métabolisme : $P = 100$ W ;
- puissance surfacique de perte du corps humain dans l'eau (par convection) : $p_{\mathrm{conv}} = \alpha\,(T_{\mathrm{ext}} - T)$, avec T la température de la peau, T_{ext} la température de l'eau et $\alpha = 10\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.

D2 — 18 Combinaison de plongée (Résolution de problème)

1) Quelle doit être l'épaisseur d'une combinaison de plongée en néoprène pour éviter l'hypothermie lors d'une baignade infiniment longue ?

Données :
- capacité thermique massique du corps humain : $c = 3,5\ \mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$;
- résistance thermique de la peau : $R = 3\times10^{-2}\ \mathrm{K\cdot W^{-1}}$;
- conductivité thermique du néoprène : $\lambda = 0,2\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$;
- puissance produite par le métabolisme : $P = 100$ W ;
- puissance surfacique de perte du corps humain dans l'eau (par convection) : $p_{\mathrm{conv}} = \alpha\,(T_{\mathrm{ext}} - T)$, avec T la température de la peau, T_{ext} la température de l'eau et $\alpha = 10\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.

D2 — 19 Astéroïde radioactif

Un astéroïde sphérique de rayon R se trouve dans un région de l'espace où il ne reçoit quasiment aucun rayonnement électromagnétique. Il est constitué d'une roche noire (masse volumique ϱ et conductivité thermique κ) radioactive, dont l'unité de masse produit l'énergie $\dot{q}$ par unité de temps. La surface de l'astéroïde est à la température T_S ; il rayonne donc, par unité de surface et par unité de temps, une énergie $\sigma\,T_S^4$, où σ est la constante de Stefan `[voir chapitre T3]`.

1) Déterminer la température $T(r)$ en régime stationnaire, à la distance r du centre de l'astéroïde.

2) Calculer alors la température de surface T_S de l'astéroïde en fonction des données suivantes : $R = 50$ km, $\kappa = 2\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$, $\varrho = 4\times10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\dot{q} = 1,4\times10^{-10}\ \mathrm{W\cdot kg^{-1}}$ et $\sigma = 5,67\times10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$.

Données : On rappelle la surface d'une sphère $S(r) = 4\,\pi\,r^2$. Le volume compris entre la sphère de rayon r et celle de rayon $r + \mathrm{d}r$ est $4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r$. Le gradient en sphérique est

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T(r) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_r}$$

Effusivité thermique

La température est une grandeur physique qui a été historiquement délicate à définir. Elle est en effet plus subtile que la notion commune qu'on peut en avoir en disant qu'un corps est « chaud » ou « froid ».
La sensibilité humaine porte en réalité sur le transfert thermique δQ, et non sur la température T. Un corps nous apparaît plus chaud qu'un autre au toucher si le contact conduit à un faible transfert thermique reçu par le corps en question (ou un fort transfert fourni si le corps est à une température plus élevée). Qualitativement, un corps chaud est un corps qui nous pompe peu d'énergie thermique (ou qui nous en cède beaucoup).
On cherche dans ce DM à mettre ceci en valeur en calculant le flux thermique entre deux corps en contact, premièrement dans le cas d'un régime stationnaire, et deuxièmement dans le cas où les deux corps viennent d'être mis en contact.

D2 — 15 Température de contact et flux thermique en régime stationnaire

On considère deux cylindres isolés thermiquement sur leurs surfaces latérales, de même section $S = \pi\, a^2$ avec $a = 5$ cm, de même axe (Ox), de conductivités thermiques K_1 et K_2 respectivement, de longueurs L_1 et L_2. Ils sont accolés en $x = 0$. On maintient leurs extrémités $x = -L_1$ et $x = L_2$ aux températures T_1 et T_2. On se place en régime stationnaire.

1) Déterminer la température T_i à l'interface (en $x = 0$).

2) En faire l'application numérique dans les deux cas suivants :
— contact entre une main et du bois ;
— contact entre une main et de l'acier.
Commenter.

3) Calculer dans les deux cas le flux thermique $\mathcal{P}$ à l'interface. En faire les applications numériques dans les deux cas précédents.

4) Conclure qu'un des deux matériaux, bois ou acier, nous paraît plus « froid » (au sens du langage commun) que l'autre, alors qu'ils sont à la même température.

Données. On donne $T_1 = 37°\text{C}$ (main), $T_2 = 20°\text{C}$ (bois ou acier), on prend $L_1 = L_2 = 1$ m pour simplifier, et enfin $K_1 = 10\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (main), $K_2 = 1\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (bois), et $K_2' = 100\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (acier).

D2 — 16 Température et flux thermique après une mise en contact

On reprend les deux cylindres de l'exercice précédent. Ils sont maintenant considérés comme illimités en longueur. Ils viennent (à $t = 0$) d'être mis en contact en $x = 0$. Le cylindre 1 s'étend ainsi de $x = -\infty$ à $x = 0$, et le cylindre 2 de $x = 0$ à $x = +\infty$. Juste avant la mise en contact, le cylindre 1 a une température homogène T_1 et le cylindre 2 a une température uniforme T_2. On note μ_i les masses volumiques des cylindres $i = 1, 2$, c_i leurs capacités thermiques massiques et K_i leurs conductivités thermiques.

On admet (ne pas chercher à le vérifier) que la solution de l'équation de diffusion avec les conditions aux limites et les conditions initiales de l'énoncé s'écrit

$$T_1(x,\,t) = A_1 + \frac{2\,B_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{D_1\,t}}} \exp(-u^2)\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad T_2(x,\,t) = A_2 + \frac{2\,B_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{D_2\,t}}} \exp(-u^2)\,\mathrm{d}u$$

avec A_1, A_2, B_1 et B_2 des constantes à déterminer. On donne

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{D\,t}}} \exp(-u^2)\,\mathrm{d}u = \pm 1$$

1) Déterminer les 4 constantes à partir des conditions aux limites. On supposera le contact thermique parfait à l'interface (en $x = 0$), c'est-à-dire l'égalité des températures à gauche ($x = 0^-$) et à droite ($x = 0^+$). On a aussi l'égalité des flux thermiques (pas d'accumulation d'énergie à l'interface : toute l'énergie qui vient de la droite passe à gauche).

2) En déduire la température à l'interface T_i en fonction des **effusivités thermiques** $E_1 = \sqrt{\mu_1\,c_1\,K_1}$ et $E_2 = \sqrt{\mu_2\,c_2\,K_2}$.

3) Obtenir aussi le flux thermique à l'interface.

4) Faire les applications numériques des températures d'interface dans les cas d'un contact main/bois et main/acier.

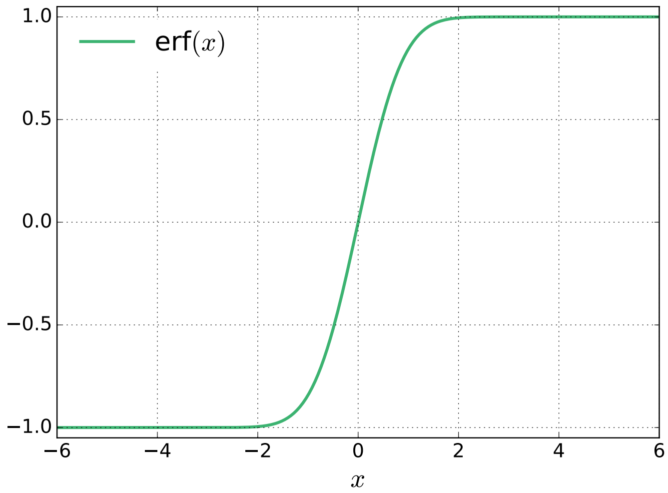
5) Comparer au modèle de l'exercice précédent. Quel modèle décrit le mieux la situation où une personne marche pieds nus sur un sol ?

Données. On donne $E_1 = 1,8 \times 10^3$ USI (main), $E_2 = 0,4 \times 10^3$ USI (bois) et $E_2' = 14 \times 10^3$ USI (acier).

Remarque. La fonction solution de l'équation de la chaleur avec les conditions aux limites et les conditions initiales de l'énoncé est la **fonction d'erreur**

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2)\,\mathrm{d}u$$

dont la représentation graphique est



Si dans une maison, on a l'impression en marchant pieds nus qu'un sol en marbre est plus froid qu'un sol en parquet, ce n'est donc pas une question de température du sol (ils sont à la même température, celle de la maison) mais une question d'effusivité des matériaux. Un matériau avec une faible effusivité nous paraît plus « chaud » (bois du parquet) qu'un matériau avec une forte effusivité (marbre). Pour cette raison, l'effusivité thermique est une grandeur très utilisée dans le domaine du bâtiment (mais pas seulement).