T3-TD

Correction

T3 — 08 Astéroïde

1) Il y a trois modes de transfert thermique : par conduction (ou diffusion), par convection et par rayonnement. Les deux premiers n'ont lieu que dans les milieux matériels. **L'espace étant vide**, ils ne peuvent pas s'y manifester. Le seul mode possible d'échange thermique est le rayonnement.

2) On utilise la loi de déplacement de Wien

$$\lambda_{\max} T = 3 \text{ mm} \cdot \text{K} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lambda_{\max} = 1{,}5 \times 10^{-4} \text{ m}}$$

Cette longueur d'onde est à la limite entre le domaine micro-onde et le domaine infra-rouge (la fréquence correspondante est $f = c / \lambda_{\max} = 2 \times 10^{12}$ Hz).

3) Appliquons le premier principe à l'astéroïde entre t et $t + \mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}E = \delta W + \delta Q$$

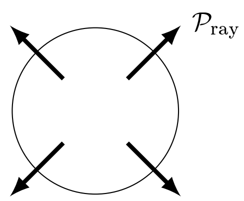
Dans le vide spatial, il n'est soumis à aucune force, (donc ne possède aucune énergie potentielle) et par conséquent sa vitesse ne varie pas : son énergie cinétique est constante. Ainsi $\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p + \mathrm{d}U = \mathrm{d}U$. Par ailleurs, la pression de l'extérieur est nulle (vide) donc le travail des forces de pression aussi $\delta W = 0$. Il ne reste que

$$\mathrm{d}U = \delta Q$$

On modélise l'astéroïde par une phase incompressible indilatable, de capacité thermique massique c donc

$$\mathrm{d}U = c\, \varrho\, V\, \mathrm{d}T \qquad \text{avec} \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

et le transfert thermique reçu par rayonnement entre t et $t + \mathrm{d}t$ est



$$\delta Q = -\mathcal{P}_{\text{ray}}\, \mathrm{d}t \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{P}_{\text{ray}} = \varphi\, S$$

(le signe « $-$ » rend compte du fait que ce transfert n'est pas reçu mais fourni) où φ est la puissance surfacique, donnée pour un corps noir par la loi de Stefan

$$\varphi = \sigma T^4$$

et $S = 4\pi R^2$ est la surface de l'astéroïde. Finalement, la conservation de l'énergie entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit pour l'astéroïde

$$\frac{4}{3}\pi R^3 c\, \varrho\, \mathrm{d}T = -4\pi R^2 \sigma T^4\, \mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{3\sigma}{c\,\varrho\, R} T^4}$$

4) On résout cette équation différentielle du premier ordre non linéaire par séparation des variables

$$\int_{T_0}^{T(t)} \frac{\mathrm{d}T}{T^4} = -\int_0^t \alpha\, \mathrm{d}t \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{3\sigma}{c\,\varrho\, R}$$

soit

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{T_0^3} - \frac{1}{T(t)^3}\right) = -\alpha\, t \qquad \text{et finalement} \qquad \boxed{T(t) = \frac{T_0}{(1 + 3\,\alpha\, T_0^3\, t)^{1/3}}}$$

On peut tracer le graphe ci-contre. On observe que la décroissance est très lente (loi de puissance $t^{-1/3}$) et que

$$T \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

comme attendu : l'astéroïde se thermalise avec l'univers de température nulle.