T3-TD

Correction

T3 — 07 Rayonnement Hawking

L'exercice consiste à exploiter un résultat (évidemment admis) de mécanique quantique et de relativité générale pour obtenir la durée de vie d'un trou noir.

1) *(Sur cette première question, on discute le rayonnement du Soleil pour le comparer ensuite à celui d'un trou noir.)* La loi de Stefan donne que la puissance surfacique émise par un corps noir de température T est

$$\boxed{\varphi = \sigma\,T^4}$$

On peut considérer le Soleil sphérique de rayon R_S, et on le modélise comme un corps noir de température (de surface) T_S. Il émet donc une puissance

$$\boxed{\mathcal{P}_S = 4\,\pi\,\sigma\,R_S^2\,T_S^4 \approx 4{,}2\times 10^{26}\ \mathrm{W}}$$

Cela correspond à une perte d'énergie

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_S}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_S \qquad \text{donc une perte de masse} \qquad \frac{\mathrm{d}M_S}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathcal{P}_S}{c^2} \approx -4{,}7\times 10^{9}\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$$

en utilisant que $\mathcal{E}_S = M_S\,c^2$. **En un an, le Soleil perd par rayonnement une masse** $\Delta M_S = 1{,}5\times 10^{17}$ kg (complètement négligeable devant sa masse totale $M_S = 2{,}0\times 10^{30}$ kg).

2) Notons [L] une unité de longueur, [M] une unité de masse, et [T] une unité de temps et [K] une unité de température. On rappelle quelques formules de physique utiles pour les homogénéités :

$$m\,\vec{a} = -G\,\frac{m\,M}{r^2}\,\vec{e_r}, \qquad E = \hbar\,\omega, \qquad U = \frac{3}{2}\,N\,k_B\,T \qquad \text{et} \qquad E = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

Elles nous permettent de trouver les dimensions suivantes

$$\begin{aligned}
[G] &= [L]^3\,[M]^{-1}\,[T]^{-2}\\
[\hbar] &= [M]\,[L]^2\,[T]^{-1}\\
[c] &= [L]\,[T]^{-1}\\
[k_B] &= [L]^2\,[T]^{-2}\,[K]^{-1}
\end{aligned}$$

Et on cherche dimensionnellement la température de Hawking T_H sous la forme

$$T_H = \frac{G^\alpha\,\hbar^\beta\,c^\gamma\,k_B^\delta}{8\,\pi\,M}$$

Déjà, on a forcément $\delta = -1$. Ensuite, on calcule qu'il faut

$$\alpha = -1 \qquad \beta = 1 \qquad \text{et} \qquad \gamma = 3$$

soit finalement

$$\boxed{T_H = \frac{\hbar\,c^3}{8\,\pi\,G\,k_B\,M}}$$

3) Avec le même raisonnement, on trouve que

$$\boxed{R_H = \frac{2\,G\,M}{c^2}}$$

4) S'il rayonne comme un corps noir, le trou noir émet une puissance

$$\mathcal{P}_{\mathrm{bh}} = 4\,\pi\,\sigma\,R_H^2\,T_H^4 = \frac{\sigma\,\hbar^4\,c^8}{256\,\pi^3\,G^2\,k_B^4\,M^2} = \frac{\hbar\,c^6}{15360\,\pi\,G^2\,M^2}$$

Pour avoir $\mathcal{P}_{\text{bh}} = \mathcal{P}_S$, il faut

$$\boxed{M = \sqrt{\frac{\hbar\, c^6}{15360\,\pi\, G^2\, \mathcal{P}_S}} = 921\ \text{kg}}$$

qui est une valeur extrêmement faible. **Cela met en lumière que les deux rayonnements ne sont pas du tout comparables** : le Soleil émet de l'énergie qui provient de réactions de fusion nucléaire en son cœur. Le rayonnement du trou noir est tout autre : il est d'origine purement quantique.

Pour connaître la durée de vie d'un trou noir, on peut écrire que

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{bh}}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_{\text{bh}} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\frac{\hbar\, c^4}{15360\,\pi\, G^2\, M^2}$$

qui se résout par séparation des variables

$$M^2\,\mathrm{d}M = -\frac{\hbar\, c^4}{15360\,\pi\, G^2}\,\mathrm{d}t$$

qu'on intègre entre la masse initiale M_0 à $t = 0$ et la masse finale nulle (le trou noir s'est complètement évaporé) à $t = \tau$. On obtient

$$\boxed{\tau = \frac{5120\,\pi\, G^2\, M_0^3}{\hbar\, c^4}}$$

Commentons pour finir un aspect pour le moins étrange de la physique des trous noirs : par rayonnement Hawking, ceux-ci perdent de l'énergie, donc de la masse. Mais leur température est inversement proportionnelle à leur masse, si bien que **lorsqu'ils rayonnent, ils se réchauffent !** C'est très contre-intuitif.

5) On calcule avec $M_0 = 13 \times 10^{39}$ kg que la durée de vie du trou noir au centre de la galaxie M87 est

$$\boxed{\tau = 1{,}8 \times 10^{104}\ \text{s} = 5{,}7 \times 10^{93}\ \text{ans}}$$

(Rappelons que l'univers a environ 13 milliards d'années seulement...)

Nous avons considéré ici que le trou noir ne faisait que rayonner. Or le trou noir peut aussi absorber de la matière par attraction gravitationnelle, et donc à l'inverse grossir : ce phénomène tend à allonger encore davantage sa durée de vie.