T3-TD

Correction

T3 — 04 Lois du rayonnement du corps noir à l'équilibre

1) c est la célérité de la lumière dans le vide, k_B est la constante de Boltzmann et h est la constante de Planck. Les valeurs sont

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \qquad k_B = 1{,}38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \qquad \text{et} \qquad h = 6{,}62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

2) La loi de Wien donne la longueur d'onde pour laquelle l'émission du corps noir est maximale. La densité spectrale de flux y passe donc par son maximum et sa dérivée y est nulle. On a par conséquent

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_{\max}) = 0 = -\frac{2\,\pi\,h\,c^2}{\lambda_{\max}^6\left(\exp(\ldots) - 1\right)^2}\left(5\left(\exp(\ldots) - 1\right) - \frac{h\,c}{k_B\,T\,\lambda_{\max}}\exp(\ldots)\right)$$

On a donc, en posant $x = h\,c\,/\,(k_B\,T\,\lambda_{\max})$,

$$5\,(\mathrm{e}^x - 1) - x\,\mathrm{e}^x = 0 \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{e}^{-x} = 1 - \frac{x}{5}$$

L'énoncé donne la solution $x \approx 4{,}96$. En conséquence,

$$\boxed{\lambda_{\max}\,T \approx \frac{h\,c}{4{,}96\,k_B} \approx 2{,}9 \text{ mm} \cdot \text{K}}$$

on a bien retrouvé la **loi de Wien** à partir de la loi de Planck.

3) $\lambda = c\,/\,\nu$. En dérivant, $\mathrm{d}\lambda = -c\,\mathrm{d}\nu\,/\,\nu^2$.

4) L'énoncé écrit

$$\mathrm{d}\varphi = F(\lambda)\,|\mathrm{d}\lambda| = G(\nu)\,|\mathrm{d}\nu|$$

Par conséquent, puisque $|\mathrm{d}\lambda| = c\,|\mathrm{d}\nu|\,/\,\nu^2$, on peut poursuivre

$$\frac{2\,\pi\,h\,c^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\,c}{k_B\,T\,\lambda}\right) - 1}\,|\mathrm{d}\lambda| = \frac{2\,\pi\,h\,\nu^5}{c^3}\,\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\,\nu}{k_B\,T}\right) - 1}\,\frac{c\,|\mathrm{d}\nu|}{\nu^2} = G(\nu)\,|\mathrm{d}\nu|$$

On identifie alors

$$\boxed{G(\nu) = \frac{2\,\pi\,h\,\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\,\nu}{k_B\,T}\right) - 1}}$$

qui est une autre écriture de la loi de Planck, donnant la densité spectrale de rayonnement en fonction de la fréquence ν.

5) Il faut calculer

$$\varphi = \int_0^\infty G(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty \frac{2\,\pi\,h\,\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\,\nu}{k_B\,T}\right) - 1}\,\mathrm{d}\nu$$

En posant $x = h\,\nu/(k_B\,T)$, on a

$$\varphi = \frac{2\,\pi\,k_B^4}{h^3\,c^2}\,T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\pi^5\,k_B^4}{15\,h^3\,c^2}\,T^4$$

Et nous avons obtenu la **loi de Stefan** à partir de la loi de Planck, en précisant

$$\boxed{\varphi = \sigma\,T^4 \qquad \text{avec} \qquad \sigma = \frac{2\,\pi^5\,k_B^4}{15\,h^3\,c^2}} \qquad \left(\approx 5{,}67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}\right)$$

La constante de Stefan σ apparaît comme une jolie combinaison de trois constantes fondamentales de la physique.