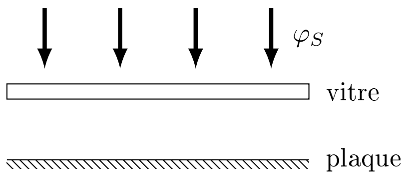
T3-TD

Correction

T3 — 03 Effet de serre par plusieurs vitres

1) Commençons par un schéma.



Puis on précise les notations : T est la température de la plaque, T_v celle de la vitre, et φ_S est la puissance surfacique reçue du Soleil. On note S la surface de la plaque et de la vitre et σ la constante de Stefan.

La plaque est un corps noir : elle absorbe tout le rayonnement qui lui parvient, et elle émet un rayonnement propre vérifiant la loi de Stefan. Par ailleurs, la vitre est supposée parfaitement transparente pour le rayonnement solaire visible, mais complètement absorbante pour le rayonnement de la plaque infrarouge. On supposera, même si l'énoncé ne le fait pas, qu'elle émet un rayonnement propre vérifiant aussi la loi de Stefan.

Dans ce cas, les bilans radiatifs s'écrivent

« énergie reçue pendant $\mathrm{d}t$ = énergie émise pendant $\mathrm{d}t$ »

Or les énergies pendant $\mathrm{d}t$ sont les puissances, donc les puissances surfaciques φ fois les surfaces S. La surface étant identique pour la vitre et la plaque, on peut directement mener le bilan en terme de flux surfacique.

Pour la plaque, il se traduit par

$$\varphi_S + \sigma T_v^4 = \sigma T^4$$

et pour la vitre par

$$\sigma T^4 = 2\,\sigma T_v^4$$

Le facteur 2 provient du fait que la plaque émet vers le haut et vers le bas. Le calcul se poursuit facilement, on trouve d'abord

$$\boxed{T_v = 2^{-1/4}\,T}$$

puis

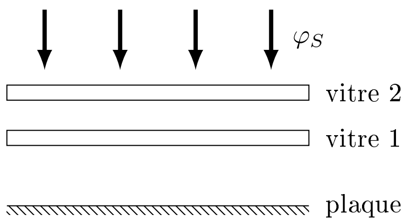
$$\boxed{T = \left(\frac{2\,\varphi_S}{\sigma}\right)^{1/4}}$$

2) Les applications numériques donnent

$$\boxed{T = 108°\mathrm{C} \qquad \text{et} \qquad T_v = 47°\mathrm{C}}$$

Cet exercice modélise une serre : on calcule que la température y est élevée, ce qui est idéal pour l'agriculture.

3) Si il y a deux vitres, notée 1 (en bas) et 2 (en haut), on fait un schéma puis les raisonnements sont identiques.



La vitre 1 est totalement absorbante pour le rayonnement infrarouge de la vitre 2 et inversement. On a donc

— le bilan radiatif de la vitre 2

$$\sigma T_1^4 = 2\,\sigma T_2^4$$

— le bilan radiatif de la vitre 1

$$\sigma T_2^4 + \sigma T^4 = 2\,\sigma T_1^4$$

— et le bilan radiatif de la plaque

$$\varphi_S + \sigma\, T_1^4 = \sigma\, T^4$$

De ces bilans on déduit

$$\boxed{T_2 = 2^{-1/4}\, T_1, \qquad T_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} T \qquad \text{et} \qquad T = \left(\frac{3\,\varphi_S}{\sigma}\right)^{1/4}}$$

Ensuite, on peut refaire le même raisonnement pour trois vitres, pour trouver

$$T = \left(\frac{4\,\varphi_S}{\sigma}\right)^{1/4}$$

et on voit se dessiner la relation de récurrence suivante : pour n vitres, on a

$$\boxed{T = \left(\frac{(n+1)\,\varphi_S}{\sigma}\right)^{1/4}}$$

4) Nous voyons que plus il y a de vitres, plus la plaque profite de l'effet de serre donc plus sa température est élevée. Désormais, on considère que les vitres réfléchissent une fraction r du rayonnement solaire : plus il y a de vitres, moins il y aura de puissance solaire qui arrive sur la plaque, donc moins la température de celle-ci sera élevée. Il y a donc effectivement un compromis à avoir, car plus de vitres, c'est plus d'effet de serre mais moins de flux solaire... La vitre la plus haute laisse passer une fraction $(1-r)$ du flux solaire qu'elle reçoit, donc

$$(1-r)\,\varphi_S$$

La vitre en dessous laisse également passer une fraction $(1-r)$ du flux solaire qu'elle reçoit, donc

$$(1-r)\times(1-r)\,\varphi_S$$

etc... On voit tout de suite que pour n vitres, le flux solaire qui arrive sur la plaque passe de φ_S à

$$\varphi_S \;\longrightarrow\; (1-r)^n\,\varphi_S$$

Il suffit de changer la formule de la question **3)** pour écrire

$$T = \left(\frac{(n+1)\,(1-r)^n\,\varphi_S}{\sigma}\right)^{1/4}$$

Ensuite, il faut voir T comme une fonction de n. Si T est maximale, T^4 est aussi maximale et alors

$$\frac{\mathrm{d}T^4}{\mathrm{d}n} = 0$$

Pour calculer la dérivée, on fait apparaître l'exponentielle

$$T^4 = \frac{\varphi_S}{\sigma}\,(n+1)\;\mathrm{e}^{n\ln(1-r)}$$

qui permet d'écrire

$$\frac{\mathrm{d}T^4}{\mathrm{d}n} = \frac{\varphi_S}{\sigma}\Big(1 + (n+1)\ln(1-r)\Big)\,\mathrm{e}^{n\ln(1-r)}$$

Cette dérivée est nulle pour

$$\boxed{n_{\mathrm{opt}} = -1 - \frac{1}{\ln(1-r)}}$$

5) L'application numérique donne

$$\boxed{n_{\mathrm{opt}} = 11}$$