OP6-TD

Correction

OP6 — 02 Évolution de la frange centrale le long de l'axe z

1) Si le trou central est bouché, il s'agit simplement de deux trous d'Young séparés d'une distance $2\,a$. Sur l'axe optique, on a une différence de marche nulle par symétrie $\delta = 0$. *(On peut aussi utiliser que $\delta = 2\,n\,a\,x\,/\,z$ si on note x l'axe vertical comme dans le cours, avec z la distance à l'écran. Alors $\delta = 0$ pour $x = 0$ sur l'axe optique).* La formule de Fresnel

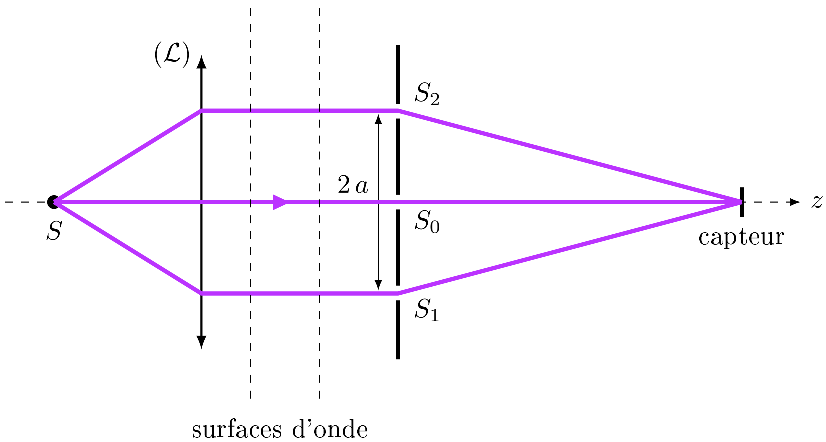
$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\,\sqrt{\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2}\,\cos\left(\frac{2\,\pi}{\lambda_0}\,\delta\right)$$

implique donc

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_{\max}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\,\sqrt{\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2}$$

sur l'axe optique. On aura une **frange brillante quelque soit la position z du capteur**.

2) Notons S_1 le trou du bas, S_2 celui du haut, et S_0 celui du centre. Ces trois sources secondaires vérifient les trois critères de cohérence. Elles donnent donc lieu à des interférences.



Les vibrations lumineuses qu'elles émettent prennent pour valeur en un point M quelconque de l'écran

$$\underline{a}_1 = A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t - \varphi_1(M))}, \qquad \underline{a}_2 = A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t - \varphi_2(M))} \qquad \text{et} \qquad \underline{a}_0 = A_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t - \varphi_0(M))}$$

On a d'après l'énoncé $A_1 = \sqrt{\mathcal{E}_1} = A_2 = \sqrt{\mathcal{E}_2}$ et $A_0 = \sqrt{\mathcal{E}_0}$. Quant aux phases, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_0(M) & = & \varphi_0(S_0) + \dfrac{2\,\pi}{\lambda_0}\,\mathcal{L}(S_0M) \\ \varphi_1(M) & = & \varphi_1(S_1) + \dfrac{2\,\pi}{\lambda_0}\,\mathcal{L}(S_1M) \\ \varphi_2(M) & = & \varphi_2(S_2) + \dfrac{2\,\pi}{\lambda_0}\,\mathcal{L}(S_2M) \end{array}\right.$$

Or S_0, S_1 et S_2 sont sur la même surface d'onde issue de la source primaire S, donc $\varphi_0(S_0) = \varphi_1(S_1) = \varphi_2(S_2)$. On en déduit

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_1(M) - \varphi_0(M) & = & \dfrac{2\,\pi}{\lambda_0}\Big(\mathcal{L}(S_1M) - \mathcal{L}(S_0M)\Big) \\ \varphi_2(M) - \varphi_0(M) & = & \dfrac{2\,\pi}{\lambda_0}\Big(\mathcal{L}(S_2M) - \mathcal{L}(S_0M)\Big) \end{array}\right.$$

Sur l'axe optique, c'est-à-dire en $x = 0$, on a (voir la fin de la correction)

$$\mathcal{L}(S_1M) - \mathcal{L}(S_0M) = \mathcal{L}(S_2M) - \mathcal{L}(S_0M) = \frac{n\,a^2}{2\,z} \equiv \delta$$

La vibration lumineuse totale s'écrit alors

$$\underline{a}_{\text{tot}} = \sum_{i=0,1,2} \underline{a}_i = \left(A_0 + 2\,A_1\,\mathrm{e}^{2\,\pi\,\mathrm{j}\,\delta\,/\,\lambda_0}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t - \varphi_0(M))}$$

et l'éclairement est

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{tot}} = |\underline{a}_{\text{tot}}|^2 = \left(A_0 + 2\,A_1\,\mathrm{e}^{2\,\pi\,\mathrm{j}\,\delta\,/\,\lambda_0}\right)\left(A_0 + 2\,A_1\,\mathrm{e}^{-2\,\pi\,\mathrm{j}\,\delta\,/\,\lambda_0}\right) = \mathcal{E}_0 + 4\,\mathcal{E}_1 + 4\sqrt{\mathcal{E}_0\,\mathcal{E}_1}\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,a^2}{\lambda_0\,z}\right)}$$

3) L'éclairement est maximum lorsque le cosinus vaut 1 donc pour les abscisses z_p telles que

$$z_p = \frac{n\,a^2}{2\,\lambda_0\,p} \qquad \text{avec} \qquad p \text{ un entier.}$$

On peut donc **tracer** $1/z_p$ **en fonction de** p, qu'on modélise par une droite dont la pente sera $2\,\lambda_0\,/\,(n\,a^2)$, ce qui permet de remonter à a.

Remarque. Calcul des différences de marche. Si le point M est le capteur, donc s'il est sur l'axe optique, on a directement

$$S_0M = z \qquad \text{et} \qquad S_1M = S_2M = \sqrt{z^2 + a^2} \approx z + \frac{a^2}{2\,z}$$

par théorème de Pythagore puis développement limité car $a \ll z$. Les différences de marche sont alors

$$\mathcal{L}(S_1M) - \mathcal{L}(S_0M) = \mathcal{L}(S_2M) - \mathcal{L}(S_0M) = n\,(S_1M - S_0M) = \frac{n\,a^2}{2\,z}$$