OP6-TD

Correction

OP6 — 01 Utilisation de la notation complexe (Appendice mathématique)

L'idée de cet exercice est de se convaincre sur l'exemple d'interférences à deux ondes que l'utilisation de la notation complexe fonctionne et est plus efficace, en terme de rapidité de calcul, que le calcul en réel. Évidemment, les questions 1 et 2 demandent d'aboutir au même résultat (l'éclairement pour des interférences à deux ondes) par deux méthodes différentes ; et ce résultat nous est bien connu puisqu'il s'agit de la formule de Fresnel.

1) On commence par le calcul en réel. Les vibrations lumineuses se somment

$$s_{\text{tot}}(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$$

L'éclairement est alors par définition

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = 2\,\langle s_{\text{tot}}^2(M,t)\rangle$$

où $\langle\cdot\rangle$ désigne la valeur moyenne temporelle. On calcule ensuite en développant le carré que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) &= 2\,A_1^2(M)\,\langle\cos^2(\omega\,t - \varphi_1(M))\rangle\\ &\quad + 2\,A_2^2(M)\,\langle\cos^2(\omega\,t - \varphi_2(M))\rangle\\ &\quad + 4\,A_1(M)\,A_2(M)\,\langle\cos(\omega\,t - \varphi_1(M))\,\cos(\omega\,t - \varphi_2(M))\rangle\end{aligned}$$

Et les valeurs moyennes sont respectivement (on n'écrit plus les dépendances en M pour alléger les notations)

$$\langle\cos^2(\omega\,t - \varphi_1)\rangle = \langle\cos^2(\omega\,t - \varphi_2)\rangle = \frac{1}{2}$$

et

$$\begin{aligned}\langle\cos(\omega\,t - \varphi_1)\,\cos(\omega\,t - \varphi_2)\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle\cos(2\,\omega\,t - \varphi_1 - \varphi_2)\rangle + \langle\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\rangle\Big)\\ &= \frac{1}{2}\,\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\end{aligned}$$

car $\cos a\,\cos b = 1\,/\,2\,(\cos(a+b) + \cos(a-b))$; et la valeur moyenne du premier cosinus est nulle, tandis que l'argument du deuxième est une constante si les sources vérifient les critères de cohérence. La valeur moyenne du deuxième cosinus est donc lui-même. Finalement

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{tot}} = A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2\,\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

C'est la **formule de Fresnel** puisque $\mathcal{E}_1 = A_1^2$, $\mathcal{E}_2 = A_2^2$ et $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\,\pi\,\delta\,/\,\lambda$ avec δ la différence de marche.

2) Même calcul, cette fois en complexe. On commence par traduire les vibrations lumineuses en complexe. On retire à nouveau les dépendances en M pour raccourcir les notations

$$\underline{s}_1 = A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t - \varphi_1)} \qquad \text{et} \qquad \underline{s}_2 = A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t - \varphi_2)}$$

alors

$$\underline{s}_{\text{tot}} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = \Big(A_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\varphi_1} + A_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\varphi_2}\Big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_{\text{tot}} = |\underline{s}_{\text{tot}}|^2 = \underline{s}_{\text{tot}}\,\underline{s}_{\text{tot}}^*$$

On poursuit le calcul selon

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{tot}} &= \Big(A_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\varphi_1} + A_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\varphi_2}\Big)\Big(A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi_1} + A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi_2}\Big)\\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1\,A_2\,\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\varphi_2 - \varphi_1)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,(\varphi_2 - \varphi_1)}\big)\\ \mathcal{E}_{\text{tot}} &= A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2\,\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\end{aligned}$$

On retrouve la formule de Fresnel, de manière un peu plus rapide.