OP1-TD

Correction

OP1 — 13 Fibre optique à gradient d'indice

1) Il s'agit bien sûr d'écrire les lois de Descartes

$$\boxed{n_c(y)\,\sin i(y) = n_c(y+\mathrm{d}y)\,\sin i(y+\mathrm{d}y)}$$

puis de manière identique

$$n_c(y-\mathrm{d}y)\,\sin i(y-\mathrm{d}y) = n_c(y)\,\sin i(y) = n_c(y+\mathrm{d}y)\,\sin i(y+\mathrm{d}y) = n_c(y+2\,\mathrm{d}y)\,\sin i(y+2\,\mathrm{d}y) = ...$$

On comprend que la quantité $n_c \sin i$ ne dépend pas de y, et on la note C.

2) et **3)** Géométriquement, on a

$$\boxed{\sin i(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}}$$

Alors, puisque $n_c(y)\sin i(y) = C$, on a

$$\frac{n_c(y)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}} = C \qquad \text{soit} \qquad \frac{n_0\sqrt{1-\Delta\dfrac{y^2}{r_c^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}} = C$$

On obtient effectivement

$$\boxed{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{n_0^2}{C^2}\left(1-\Delta\frac{y^2}{r_c^2}\right)}$$

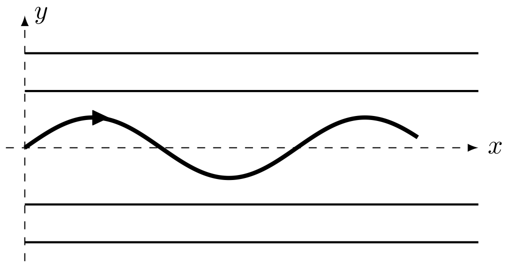
C'est une **équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre un**, pour laquelle il n'existe aucune méthode systématique de résolution. Ici, la méthode de séparation des variables conduit à une intégrale compliquée : tant pis. Par contre, on se rend compte qu'en dérivant cette équation on aboutit à

$$2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -2\,\frac{n_0^2}{C^2}\,\Delta\,\frac{y}{r_c^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + k^2\,y = 0 \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{n_0\sqrt{\Delta}}{C\,r_c}}$$

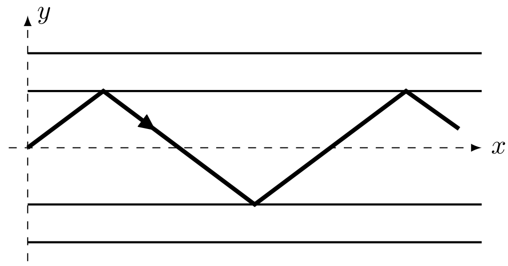
C'est l'équation d'un **oscillateur harmonique** ! (C'est en fait parce qu'on aboutit à notre équation préférée que l'énoncé a choisi cette expression de $n_c(y)$.) On a donc

$$y(x) = A\cos(k\,x+\varphi)$$

où A et φ sont deux constantes d'intégration qu'on obtiendrait en écrivant les conditions aux limites $y(0)$ et $\mathrm{d}y\,/\,\mathrm{d}x\,(0)$ (qui décrivent la géométrie du faisceau à l'entrée de la fibre, non donnée par l'énoncé). Dans tous les cas, la trajectoire du rayon dans la fibre est sinusoïdale. On peut tracer



Fibre à gradient d'indice



Fibre à saut d'indice

4) Cela ne transparaît pas dans nos calculs, mais rigoureusement $\mathrm{d}y\,/\,\mathrm{d}x$ n'est la dérivée y' que dans la limite $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y \to 0$. On prend implicitement cette limite lorsqu'on identifie $\mathrm{d}y\,/\,\mathrm{d}x$ à la dérivée pour obtenir l'équation différentielle.