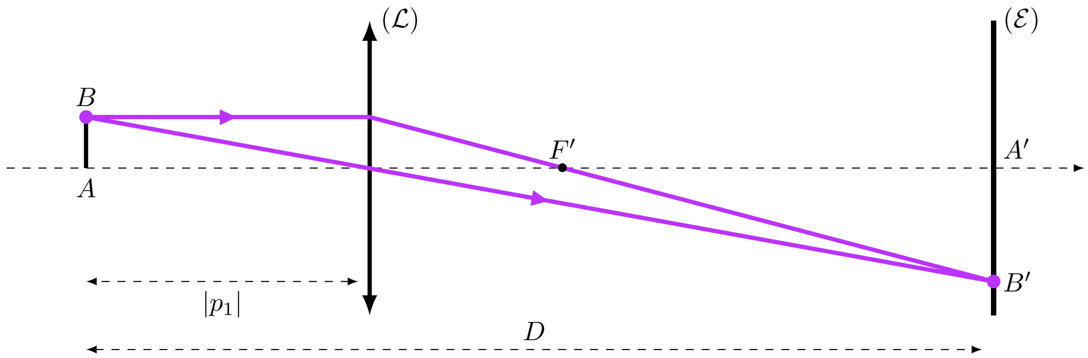
OP1-TD

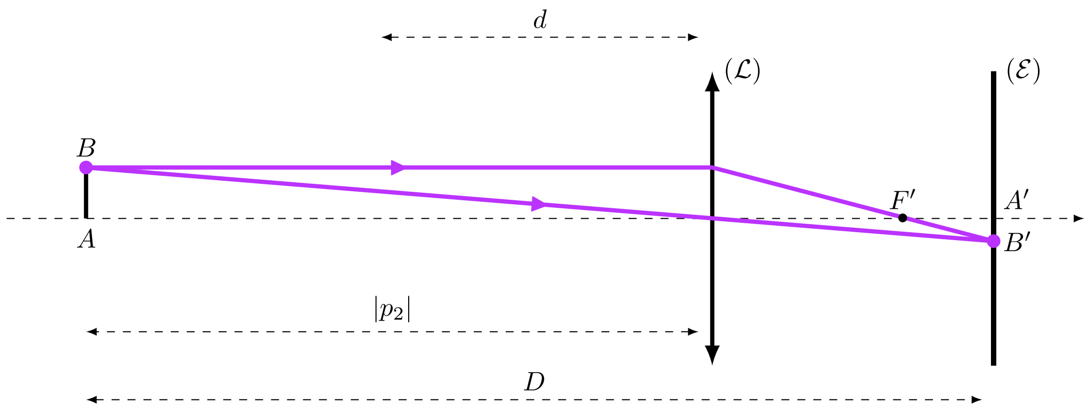
Correction

OP1 — 09 Focométrie d'une lentille convergente (2) — Méthode de Bessel

1) On commence par un schéma.



On peut aussi schématiser la deuxième configuration donnant une image à l'écran :



On observe que dans les deux cas l'image est renversée, et que la plus petite des images correspond à la configuration pour laquelle la distance entre la lentille et l'écran est la plus petite.

On a $\overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = D + p$. La relation de conjugaison de Descartes s'écrit donc

$$\frac{1}{D+p} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \qquad \text{soit} \qquad p^2 + D\,p + D\,f' = 0$$

Cette équation sur p est polynômiale. Elle admet deux racines réelles si le discriminant est positif, c'est-à-dire si

$$D^2 - 4\,D\,f' > 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{D > 4\,f' = D_{\text{min}}}$$

Dans ce cas, les deux racines sont

$$\boxed{p_1 = \frac{-D + \sqrt{D\,(D - 4\,f')}}{2} \qquad \text{et} \qquad p_2 = \frac{-D - \sqrt{D\,(D - 4\,f')}}{2}}$$

2) D'après les schémas, la distance d est

$$d = |p_2| - |p_1| = p_1 - p_2 = \sqrt{D\,(D - 4\,f')} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f' = \frac{D^2 - d^2}{4\,D}}$$

3) On calcule $\boxed{f' = 20{,}0 \text{ cm}}$.

4) Et on calcule aussi $\boxed{\Delta f' = 0{,}3 \text{ cm}}$. Cette expérience permet de conclure finalement $\quad f' = (20{,}0 \pm 0{,}3)$ cm.

Remarque. *(Hors-programme.)* Justifions l'expression de l'incertitude sur f' donnée dans l'énoncé. On la calcule en commençant par prendre le logarithme de f' :

$$\ln f' = \ln(D^2 - d^2) - \ln D - \ln 4$$

puis on différencie cette expression (la méthode de calcul est pour cette raison appelée « méthode de la dérivée logarithmique ») par rapport aux deux variables du problème D et d

$$\frac{\mathrm{d}f'}{f'} = \frac{2\,D\,\mathrm{d}D}{D^2 - d^2} - \frac{2\,d\,\mathrm{d}d}{D^2 - d^2} - \frac{\mathrm{d}D}{D} = \left(\frac{D^2 + d^2}{D\,(D^2 - d^2)}\right)\mathrm{d}D - \left(\frac{2\,d}{D^2 - d^2}\right)\mathrm{d}d$$

Il reste à multiplier par f' et utiliser son expression pour aboutir à

$$\mathrm{d}f' = \frac{D^2 + d^2}{4\,D^2}\,\mathrm{d}D - \frac{d}{2\,D}\,\mathrm{d}d$$

Ensuite, on adopte la « recette » suivante :

1. on va identifier les différentielles $\mathrm{d}f'$, $\mathrm{d}D$ et $\mathrm{d}d$ comme les incertitudes (ou les erreurs) $\Delta f'$ sur f', ΔD sur D et Δd sur d respectivement. *(Il s'agit en fait de considérer les erreurs petites et donc de considérer qu'on peut arrêter le développement limité de f' à l'ordre 1 en ces erreurs).* L'erreur sur f' du fait de l'erreur sur D (resp. d) est ainsi

$$\frac{D^2 + d^2}{4\,D^2}\,\Delta D \qquad \left(\text{resp.} \qquad \frac{d}{2\,D}\,\Delta d\right)$$

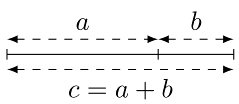
2. une erreur sur D ne peut en aucun cas « corriger » une erreur sur d, et inversement : pour cette raison on change **à la main** les signes de telle sorte **à toujours ajouter chacun des termes d'incertitudes**. À ce stade on pourrait ainsi écrire

$$\Delta f' = \frac{D^2 + d^2}{4\,D^2}\,\Delta D + \frac{d}{2\,D}\,\Delta d$$

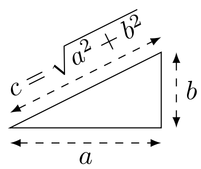
3. mais l'équation précédente traduit le fait qu'on ajoute *arithmétiquement* chacune des erreurs. En fait, pour des raisons statistiques (à savoir l'indépendance des deux erreurs sur D et d), on préfère les **ajouter de manière géométrique**, c'est-à-dire en prenant la racine de la somme de leurs carrés

$$\Delta f' = \sqrt{\left(\frac{D^2 + d^2}{4\,D^2}\,\Delta D\right)^2 + \left(\frac{d}{2\,D}\,\Delta d\right)^2}$$

et cette expression finale est bien celle de l'énoncé. *(On pensera au théorème de Pythagore pour comprendre pourquoi on parle de somme géométrique : voir ci-dessous.)*



Somme arithmétique



Somme géométrique

*Le fait de sommer deux grandeurs a et b de manière géométrique revient à les considérer orthogonales, c'est-à-dire (très qualitativement) « pas dans la même direction », ce qui a pour but de représenter leur **indépendance**.*