

## O 7/8 - TD

## Correction

## O7 – 10 Effet de peau dans un fil de cuivre

1)  $\gamma(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$  réelle si  $\omega \ll 1/\tau$ .

2) Dans le cuivre  $1/\tau \approx 10^{14}$  Hz, donc on a largement  $\omega \ll 1/\tau$ . Dans ce cas  $\gamma(\omega) = \gamma_0$

3) Dans l'ARQS, le deuxième terme de l'équation de Maxwell-Ampère  $\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est négligeable devant le premier  $\mu_0 \vec{j}$ . On a alors

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

4) On calcule  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$ , avec  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ . On obtient une équation de diffusion

$$\frac{1}{\mu_0 \gamma_0} \Delta \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

dont le coefficient de diffusion  $D$  est  $1/(\mu_0 \gamma_0)$ .

5) On considère une OPPH  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$ . Ce champ vérifie l'équation de propagation si

$$-D k^2 = i\omega \quad \text{soit} \quad k^2 = -i\omega \mu_0 \gamma_0$$

En prenant avec précaution la racine de ce nombre imaginaire pur, on obtient

$$k(\omega) = (\pm) \frac{1-i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$$

6) En remplaçant  $k$  par son expression on trouve

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta + \varphi)} \vec{e}_z$$

Le champ réel est alors

$$\vec{E} = \operatorname{Re}(\vec{E}) = E_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \varphi) \vec{e}_z$$

et en  $x = 0$

$$\vec{E}(x=0, t) = E_0' \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_z \quad \text{qu'on identifie avec} \quad E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \boxed{E_0' = E_0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0.}$$

7)  $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E} = \gamma_0 E_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta) \vec{e}_z$

8) La densité de courant contient ainsi un facteur  $e^{-x/\delta}$  qui rend compte d'une atténuation sur une distance typique  $\delta$ . Pour le cuivre  $\gamma_0 \approx 6 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $\omega = 2\pi f$  soit

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}} = 2 \text{ mm.}$$

9)  $\boxed{R = \frac{\ell}{\gamma_0 S}}$

10) L'approximation des régimes quasi-stationnaires consiste à pouvoir négliger le temps de propagation du champ électromagnétique devant les temps typiques en jeu dans le système. Ici le temps typique est la période du signal  $T = 1/f = 1 \text{ ms}$ , tandis que le temps de propagation du champ électromagnétique sur  $L = 1 \text{ m}$  est  $T_{\text{prop}} = L/c \approx 3 \text{ ns}$ . Le deuxième est bien largement négligeable devant le premier. L'ARQS est en fait vérifiée pour toutes les fréquences inférieures à 100 MHz environ.

11) On a  $\delta < r$  pour  $\omega > 2 / (\mu_0 \gamma_0 r^2)$  soit

$$f > 17 \text{ kHz}$$

12) Si  $\delta \ll r$ , le courant est confiné sur une petite épaisseur  $\delta$  en bordure du conducteur. Il voyage donc à travers la surface grisée de la figure de droite, qu'on peut estimer à  $S \approx 2\pi r \times \delta$  (longueur  $\times$  épaisseur). La résistance est alors

$$R = \frac{\ell}{2\gamma_0 \pi r \delta} = \frac{\ell}{2\gamma_0 \pi r} \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}} \quad \left( \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \infty ! \right)$$

13) Le fait que la résistance  $R$  du fil s'accroisse à mesure que la fréquence augmente peut être dramatique énergétiquement pour le transport de forts courants à haute fréquence (la puissance dissipée est  $Ri^2$ , proportionnelle à  $R$ ). En utilisant une tresse de fils fins (pour lesquels l'épaisseur de peau est de l'ordre du rayon, donc pour lesquels le courant circule dans tout le fil), on augmente la surface  $S$  disponible pour le courant et donc on restreint  $R$ .



**Figure.** (à gauche) Le courant circule à travers toute la surface, l'épaisseur de peau étant de l'ordre du rayon d'un fil. (à droite) Le courant ne circule qu'à travers une petite surface en bordure de fil, d'épaisseur l'épaisseur de peau. La surface traversée par le courant est ainsi bien plus faible, comparée à la tresse de fils fins ; et la résistance, donc la puissance dissipée, bien plus grande.