O6-TD
Correction

O6 — 02 Câble coaxial

1) Entre les deux armatures règne le vide. En particulier, il n'y a pas de charge $\varrho = 0$. L'équation de Maxwell-Gauss se traduit donc par

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\,E(r)\right)}{\partial r} = 0$$

et donc

$$E(r) = \frac{K}{r} \qquad \text{avec} \qquad K \text{ une constante d'intégration.}$$

Puisque $E(a) = E_0$ d'après l'énoncé, on conclut $\boxed{E(r) = E_0\,\frac{a}{r}}$

2) Le champ $\vec{B}$ s'obtient par l'équation de Maxwell-Faraday (**pas de formule complexe car** $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{A}} = -\mathrm{i}\,\vec{k} \wedge \underline{\vec{A}}$ **ne fonctionne a priori que pour une OPPH**, ce qui n'est pas le cas ici). On calcule d'abord

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\mathrm{i}\,k\,E(r)\,\exp\left(\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,z)\right)\,\vec{u_\theta}$$

à l'aide du formulaire, puis $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ soit $\vec{B} = \dfrac{k}{\omega}\,E(r)\exp\left(\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,z)\right)\,\vec{u_\theta} + \underbrace{\vec{f}(r,\theta,z)}_{\text{pas une onde}}$

après intégration. Par l'absence de toute indication quant à la présence d'un champ magnétique statique dans le câble, on conclut $\vec{f} = \vec{0}$ et donc

$$\boxed{\vec{B} = \frac{k}{\omega}\,E(r)\exp\left(\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,z)\right)\,\vec{u_\theta}}$$

3) Dans le vide, l'équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$ est l'équation de d'Alembert

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

qui rend compte d'un phénomène de propagation d'onde à la célérité $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}$.

En utilisant que $\Delta\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\operatorname{div}\vec{E} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right)$ et $r\,E(r) = E_0\,a = \mathrm{Cste}$, on calcule

$$\Delta\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right) = -k^2\,E(r)\,\exp\left(\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,z)\right)\,\vec{u_r} = -k^2\,\vec{E}$$

puis sans difficulté

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\,\vec{E}$$

d'où

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad \text{soit} \qquad k = (\pm)\frac{\omega}{c}}$$

À proprement parler, ce n'est pas une **relation de dispersion**, puisque $\vec{E}$ n'est pas une OPPH (car elle n'est pas plane, son amplitude $E(r)$ dépend de r). C'est néanmoins probablement la réponse attendue par l'énoncé. On peut commenter que la propagation se fait sans absorption (k est réel) ni dispersion (v_φ ne dépend pas de ω, voir question **4)**).

4) On calcule directement, en remarquant que k est réel donc $k' = k$ si k' désigne la partie réelle de k,

$$\boxed{v_\varphi \equiv \frac{\omega}{k'} = c \qquad \text{et} \qquad v_g \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'} = c}$$

Jolie remarque. En écrivant la relation de dispersion $\omega^2 = c^2\,k'^2$ et en la dérivant par rapport à k', on obtient

$$2\,\omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'} = 2\,c^2\,k' \qquad \text{soit, en divisant par } 2\,k', \qquad \boxed{v_\varphi\,v_g = c^2}$$

qui permet de déterminer facilement $v_g = c^2\,/\,v_\varphi$ connaissant v_φ. On retiendra que dériver la relation de dispersion fonctionne de temps en temps pour calculer rapidement v_g. C'est notamment le cas avec l'équation de Klein-Gordon, rencontrée dans le chapitre sur les plasmas.