O5-TD

Correction

O5 — 01 Onde sonore dans un fluide visqueux

1) L'approximation acoustique consiste à considérer les perturbations acoustiques (ainsi que toutes leurs dérivées) comme des infiniment petits d'ordre 1 devant les grandeurs d'équilibre :

$$\begin{cases} \varrho_1 \ll \varrho_0 \\ p_1 \ll P_0 \\ v_1 \ll c \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \varrho(\vec{r}, t) = \varrho_0 + \varrho_1(\vec{r}, t) \\ P(\vec{r}, t) = P_0 + p_1(\vec{r}, t) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{0} + \vec{v_1}(\vec{r}, t) \end{cases}$$

Cette approximation permet de **linéariser** les équations de la mécanique des fluides.

2) Dans un fluide parfait, on écrit que l'écoulement est régi par l'équation d'Euler, et que l'évolution d'une particule de fluide est isentropique. La troisième et dernière équation est l'équation de continuité (ou de conservation de la masse). Une fois linéarisées, ces trois équations conduisent à

$$\begin{cases} \varrho_0 \dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1 & \text{(Équation d'Euler linéarisée)} \\ \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial t} = -\varrho_0 \,\text{div}\, \vec{v_1} & \text{(Conservation de la masse linéarisée)} \\ \varrho_1 = \varrho_0\, \chi_S\, p_1 & \text{(Évolution isentropique linéarisée)} \end{cases}$$

L'équation de Navier-Stokes ne s'applique qu'à un **écoulement incompressible**, ce qui n'est pas le cas au passage d'une onde sonore, qui est par essence une onde de compression/dilatation. En toute rigueur, on ne peut donc pas remplacer l'équation d'Euler par l'équation de Navier-Stokes ici.

Remarque. On le fait malgré tout... On remarquera aussi que si le fluide est visqueux, il y a de la dissipation d'énergie dans le fluide et l'évolution d'une particule de fluide n'a plus de raison d'être isentropique a priori. On devrait donc aussi changer l'équation thermodynamique.

3) Dans le cadre de cet exercice, on remplace l'équation d'Euler par l'équation de Navier-Stokes et on garde l'équation d'évolution isentropique inchangée. On écrit alors (il n'y a pas de force volumique à prendre en compte, car on néglige la pesanteur lorsqu'on étudie les ondes sonores, comme dans le cours)

$$\begin{cases} \varrho_0 \dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1 + \eta\, \Delta \vec{v_1} & \text{(Équation de Navier-Stokes linéarisée)} \\ \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial t} = -\varrho_0 \,\text{div}\, \vec{v_1} & \text{(Conservation de la masse linéarisée)} \\ \varrho_1 = \varrho_0\, \chi_S\, p_1 & \text{(Évolution isentropique linéarisée)} \end{cases}$$

4) En prenant la divergence de l'équation de Navier-Stokes linéarisée puis en faisant des substitutions et des commutations de dérivées, on aboutit à

$$\boxed{\Delta p_1 - \varrho_0\, \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \eta\, \chi_S \frac{\partial}{\partial t}\big(\Delta p_1\big) = 0}$$

On remarque qu'on retrouve bien l'équation de d'Alembert si $\eta = 0$ (c'est-à-dire en l'absence de viscosité).

5) Pour l'OPPH proposée (qui n'est pas à proprement parlé progressive puisque $\underline{k}$ est complexe), on obtient la relation de dispersion suivante

$$-\underline{k}^2 + \varrho_0\, \chi_S\, \omega^2 + \eta\, \chi_S\, (\mathrm{i}\,\omega)\,(-\underline{k}^2) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 / c^2}{1 + \mathrm{i}\,\eta\, \chi_S\, \omega} \qquad \text{avec} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varrho_0\, \chi_S}}}$$

6) Le calcul de $\underline{k}$ à partir de $\underline{k}^2$ est un peu long. À la place, on se contente d'un développement limité comme l'énoncé le propose. On commence par écrire formellement

$$\underline{k} = \frac{\omega / c}{(1 + \mathrm{i}\,\eta\, \chi_S\, \omega)^{1/2}}$$

puis on fait un développement limité du type $(1+x)^{-1/2}$ valable pour $\omega \ll 1\,/\,(\eta\,\chi_S)$. Alors

$$\underline{k} \approx \frac{\omega}{c}\left(1 - \mathrm{i}\,\frac{\eta\,\chi_S\,\omega}{2}\right)$$

ce qui permet d'identifier directement les parties réelle et imaginaire

$$\underline{k} = k' - \mathrm{i}\,k'' \qquad \text{avec} \qquad k' = \frac{\omega}{c} \qquad \text{et} \qquad k'' = \frac{\eta\,\chi_S\,\omega^2}{2\,c}.$$

On peut alors calculer la vitesse de phase

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = c}$$

On observe que $\boldsymbol{v_\varphi}$ **est indépendante de $\boldsymbol{\omega}$** donc le milieu n'est **pas dispersif** pour l'onde sonore (toutes les OPPH voyagent à la même vitesse).

7) En revanche, **$\boldsymbol{k'' \neq 0}$ donc le milieu est absorbant**, sur une longueur typique

$$\delta = \frac{1}{k''} = \frac{2\,c}{\eta\,\chi_S\,\omega^2}$$

L'onde de surpression s'écrit

$$\underline{p_1} = \underline{p_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - \underline{k}\,x)} = \underline{p_0}\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - k'\,x)}$$

Il faut toujours repasser en réel pour le calcul des grandeurs énergétiques. L'onde réelle est, si $\underline{p_0} = p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$,

$$p_1(x,\,t) = \mathcal{R}e(\underline{p_1}) = p_0\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\,\cos(\omega\,t - k'x + \varphi) = p_m(x)\,\cos(\omega\,t - k'x + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad p_m(x) = p_0\,\mathrm{e}^{-x/\delta}.$$

Par conséquent, l'intensité sonore $I = \langle||\vec{\pi}||\rangle = \langle||p_1\vec{v_1}||\rangle$ est, avec $\vec{v_1} = (p_1/Z)\,\vec{e_x}$,

$$I(x) = \frac{p_m^2(x)}{2\,Z} = \frac{p_0^2}{2\,Z}\,\mathrm{e}^{-2\,x/\delta}$$

Par ailleurs,

$$I_{\mathrm{dB}} = 10\,\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \text{avec} \qquad I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}.$$

Une chute de 20 décibels signifie que la nouvelle intensité sonore en décibel I'_{dB} est

$$I'_{\mathrm{dB}} = I_{\mathrm{dB}} - 20\,\mathrm{dB}$$

soit

$$10\,\log\left(\frac{I'}{I_0}\right) = 10\,\log\left(\frac{I}{I_0}\right) - 20 \qquad \text{d'où} \qquad I' = \frac{I}{100}.$$

Finalement, en insérant l'expression de $I(x)$, et en notant $x' = x + \Delta x$ où Δx est la distance recherchée,

$$\frac{p_0^2}{2\,Z}\,\mathrm{e}^{-2\,x'/\delta} = \frac{p_0^2}{100 \times 2\,Z}\,\mathrm{e}^{-2\,x/\delta} \qquad \text{soit} \qquad \Delta x = \delta\,\ln(10)$$

L'application numérique donne

$$\boxed{\Delta x = \frac{2\,c\ln(10)}{\eta\,\chi_S\,(2\,\pi\,f)^2} \approx 35\ \text{km.}}$$

Remarque. On a utilisé $\vec{v_1} = (p_1/Z)\,\vec{e_x}$ dans la dernière question. C'est « peu rigoureux » ici (comprendre « faux » !) . Voyez-vous pourquoi cette expression n'est en fait pas valable ?

Réponse à la remarque. Dans le cours, c'est l'équation d'Euler qui nous a permis de montrer que pour une OPPH $\vec{v_1} = (p_1/Z)\,\vec{u}$. Ici, nous n'avons plus l'équation d'Euler mais l'équation de Navier-Stokes ! On montre alors en complexe (il suffit de mettre une OPPH dans l'équation linéarisée, faites-le !) que

$$\underline{\vec{v_1}} = \frac{\mathrm{i}\,\underline{k}\,\underline{p_1}}{\mathrm{i}\,\omega\,\varrho_0 + \eta\,\underline{k}^2}\,\vec{u} \qquad \text{soit} \qquad \underline{Z} = \frac{\mathrm{i}\,\omega\,\varrho_0 + \eta\,\underline{k}^2}{\mathrm{i}\,\underline{k}} \qquad \left(= \varrho_0\,c \qquad \text{dans le cas où} \qquad \eta = 0\right)$$

L'onde réelle est ensuite $\vec{v_1} = \mathcal{R}e(\underline{p_1}\,/\,\underline{Z})\,\vec{u}$, qui est plus compliquée que $\vec{v_1} = (p_1/(\varrho_0\,c))\,\vec{u}$! Cela ne perturbe par contre pas l'expression finale de Δx puisqu'on observe qu'elle ne dépend pas de Z.