O2-TD

Correction

O2 — 11 Corde à sauter

1) On prend l'élément de corde entre x et $x+\mathrm{d}x$. Il est de longueur $\mathrm{d}\ell = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} = \mathrm{d}x\,\sqrt{1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}$ et de masse $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}\ell$. Dans le référentiel tournant à ω (non galiléen) il subit les forces $-\vec{T}(x,t)$, $\vec{T}(x+\mathrm{d}x,t)$ et la force d'inertie d'entraînement $\mathrm{d}m\,\omega^2\,y(x,t)\,\vec{e_y}$ (toujours « m × ω^2 × distance à l'axe de rotation × vecteur axifuge »). Le TCM s'écrit alors

$$\mu\,\mathrm{d}\ell\,\vec{a} = -\vec{T}(x,t)+\vec{T}(x+\mathrm{d}x,t)+\mu\,\mathrm{d}\ell\,\omega^2\,y(x,t)\,\vec{e_y}$$

Les projections sur $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ conduisent, puisque la corde est immobile dans ce référentiel, à

$$\begin{aligned} 0 &= -T_x(x)+T_x(x+\mathrm{d}x) \\ 0 &= -T_y(x)+T_y(x+\mathrm{d}x)+\mu\,\mathrm{d}\ell\,\omega^2\,y(x) \end{aligned}$$

donc $\mathrm{d}T_x/\mathrm{d}x = 0$, soit $T_x = T_0 = \mathrm{Cste}$. Par ailleurs, $\vec{T}$ est colinéaire à la corde car celle-ci est infiniment souple donc incapable de fournir des efforts transverses. Ainsi

$$\frac{T_y}{T_x} = \tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

(θ est l'angle que fait la corde avec l'horizontale). D'où

$$T_y = T_0\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Il reste à utiliser la projection du TCM sur $\vec{e_y}$

$$\frac{\mathrm{d}T_y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\mu\,\mathrm{d}\ell\,\omega^2\,y(x) \qquad \text{soit} \qquad T_0\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\mu\,\sqrt{1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}\,\omega^2\,y(x)$$

On conclut

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\mu\,\omega^2\,y(x)}{T_0}\,\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}$$

Il reste du travail pour résoudre numériquement cette équation avec `python` (avec les conditions aux limites $y(0) = y(a) = 0$, où a est l'abscisse du deuxième point d'attache de la corde)...

Remarque 1 : On trouve le même résultat que dans l'exercice O2-05 en remplaçant l'accélération de la pesanteur g par l'accélération d'entraînement $-\omega^2\,y$.

Remarque 2 : le poids est négligeable si $m\,g \ll m\,\omega^2\,y_{\mathrm{max}}$, où y_{max} est l'amplitude maximale de la déformation (au milieu de la corde donc). Pour une corde à sauter qu'on fait tourner à 2 tours/s, on a $\omega \approx 12{,}6\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et $y_{\mathrm{max}} \approx 1$ m. Alors $\omega^2\,y_{\mathrm{max}} \approx 160\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \gg g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Le poids est effectivement négligeable.