O2-TD

Correction

O2 — 05 Corde pendante

1) On prend l'élément de corde entre x et $x+\mathrm{d}x$. Il est de longueur $\mathrm{d}\ell = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} = \mathrm{d}x\,\sqrt{1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}$ et de masse $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}\ell$. Dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) il subit les forces $-\vec{T}(x,t)$, $\vec{T}(x+\mathrm{d}x,t)$ et son poids $\mathrm{d}m\,\vec{g}$. Le TCM s'écrit alors

$$\mu\,\mathrm{d}\ell\,\vec{a} = -\vec{T}(x,t) + \vec{T}(x+\mathrm{d}x,t) + \mu\,\mathrm{d}\ell\,\vec{g}$$

Les projections sur $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ conduisent, puisque la corde est immobile, à

$$\begin{aligned} 0 &= -T_x(x) + T_x(x+\mathrm{d}x) \\ 0 &= -T_y(x) + T_y(x+\mathrm{d}x) - \mu\,\mathrm{d}\ell\,g \end{aligned}$$

donc $\mathrm{d}T_x/\mathrm{d}x = 0$, soit $T_x = T_0 = \mathrm{Cste}$. Par ailleurs, $\vec{T}$ est colinéaire à la corde car celle-ci est infiniment souple donc incapable de fournir des efforts transverses. Ainsi

$$\frac{T_y}{T_x} = \tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

(θ est l'angle que fait la corde avec l'horizontale). D'où

$$T_y = T_0\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Il reste à utiliser la projection du TCM sur $\vec{e_y}$

$$\frac{\mathrm{d}T_y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \mu\,g\,\mathrm{d}\ell \qquad \text{soit} \qquad T_0\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \mu\,g\,\sqrt{1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}$$

On conclut

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mu\,g}{T_0}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}$$

2) En posant $u = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu\,g}{T_0}\sqrt{1+u^2} \qquad \text{soit, en séparant les variables,} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\mu\,g}{T_0}\,\mathrm{d}x$$

En intégrant,

$$\mathrm{argsh}(u) = \frac{\mu\,g}{T_0}\,x + A \qquad \text{avec} \qquad A \text{ une constante.}$$

Or en $x=0$ on a $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ par symétrie (voir la forme de la corde sur le dessin), donc $u(x)=0$. Puisque $\mathrm{argsh}(0)=0$, on déduit $A=0$. Alors, en prenant le sinus hyperbolique

$$u = \mathrm{sh}\left(\frac{\mu\,g\,x}{T_0}\right) \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{sh}\left(\frac{\mu\,g\,x}{T_0}\right)$$

Une primitive de sh est ch d'où, après intégration

$$y(x) = \frac{T_0}{\mu\,g}\,\mathrm{ch}\left(\frac{\mu\,g\,x}{T_0}\right) + B \qquad \text{avec} \qquad B \text{ une constante.}$$

Finalement, $y(a/2) = y(-a/2) = 0$ donc

$$\boxed{B = -\frac{T_0}{\mu\,g}\,\mathrm{ch}\left(\frac{\mu\,g\,a}{2\,T_0}\right) \qquad \text{et} \qquad y(x) = \frac{T_0}{\mu\,g}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\mu\,g\,x}{T_0}\right) - \mathrm{ch}\left(\frac{\mu\,g\,a}{2\,T_0}\right)\right)}$$

On peut obtenir T_0 implicitement à partir de la longueur L de la corde en posant

$$L = \int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}\ell = \int_{-a/2}^{a/2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-a/2}^{a/2}\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\left(\frac{\mu\,g\,x}{T_0}\right)}\,\mathrm{d}x = \int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{ch}\left(\frac{\mu\,g\,x}{T_0}\right)\mathrm{d}x = \frac{2\,T_0}{\mu\,g}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\mu\,g\,a}{2\,T_0}\right)$$

3) $h = |y(0)|$. On obtient a en inversant l'expression de L de la question précédente.
On obtient $h = 1{,}4\times 10^{-5}$ m, complètement négligeable devant la longueur de la corde par exemple.